

LIBRO: CAL. CONTROL Y ASEGURAMIENTO DE CALIDAD

PARTE: 1. CONTROL DE CALIDAD

TÍTULO: 03. Análisis Estadísticos de Control de Calidad

A. CONTENIDO

Este Manual contiene los procedimientos para analizar, mediante cartas de control u otros métodos estadísticos, los resultados de las mediciones, pruebas de campo o pruebas de laboratorio que se realicen a muestras seleccionadas al azar con un procedimiento basado en tablas de números aleatorios, conforme a lo indicado en el Manual M·CAL·1·02, *Criterios Estadísticos de Muestreo*, para examinar sus propiedades, verificar la conformidad con los requisitos de calidad establecidos en el proyecto o aprobados por la Secretaría, detectar las deficiencias y desviaciones significativas en los procesos de construcción, y aplicar, en forma oportuna y económica, las medidas correctivas que sean necesarias.

B. CONSIDERACIONES

B.1. CARACTERÍSTICAS POR CONTROLAR

Los requisitos de calidad se establecen en el proyecto, principalmente en sus especificaciones, mediante los siguientes tipos de características:

B.1.1. Características medibles

Cuando es posible comparar los requisitos especificados con patrones de medida, utilizando los instrumentos y procedimientos de medición apropiados, para determinar el valor de una magnitud, como longitud, superficie, volumen, masa, elevación, resistencia y temperatura, o de otros parámetros susceptibles de ser cuantificados, como granulometría, contenido de agua, contenido de cemento asfáltico, grado de compactación y estabilidad Marshall, entre otros.

B.1.2. Características contables

Cuando es posible contar los requisitos especificados, como el número de elementos defectuosos de un lote producido o el número de defectos por unidad producida, que pueden ser aceptados como máximo.

B.2. CAUSAS DE VARIACIÓN EN LAS CARACTERÍSTICAS POR CONTROLAR

Los valores de características medibles que resultan como consecuencia de un proceso de producción que se ejecute normalmente, siempre estarán sujetos a variaciones, y los resultados que se midan al examinar los productos tenderán, generalmente, a una distribución de datos del tipo *Normal*, como la mostrada en la Figura 1 de este Manual, en la que se aprecia que la mitad de los resultados estarán por debajo de un valor medio y la otra mitad por arriba; ello obliga a que, siempre que se especifique el valor de un requisito en el proyecto, se defina el nivel de calidad requerido mediante el establecimiento de las tolerancias aceptables, según la importancia del requisito especificado y de acuerdo con la factibilidad real de cumplirlas.

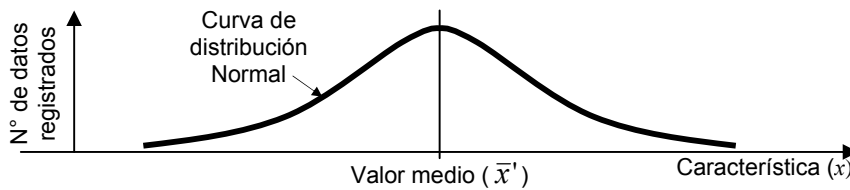


FIGURA 1.- Distribución normal de datos

Las causas que producen variaciones se denominan:

B.2.1. Causas Aleatorias

Son propias de un proceso de producción específico, debidas al azar, que se ignoran o son inevitables y que normalmente producen variaciones relativamente pequeñas, como los efectos en la gravedad terrestre que pueden producir los astros según su posición, los cambios en la temperatura ambiente durante la ejecución de un proceso a temperatura controlada o las variaciones propias de los insumos utilizados, entre otras variables.

B.2.2. Causas Asignables

Son ajenas al proceso de producción mismo y debidas a sucesos que no se presentan normalmente durante su ejecución; son identificables, susceptibles de ser eliminadas y generalmente producen variaciones importantes, como el desajuste del equipo utilizado, errores en su operación y la utilización de insumos inapropiados, entre otros.

B.3. PROCESO BAJO CONTROL ESTADÍSTICO

Cuando en un proceso de producción específico sólo actúan las causas aleatorias a que se refiere el Inciso B.2.1. de este Manual, se dice que el proceso está *bajo control estadístico*, en cuyo caso, como se muestra en la Figura 2, la variación de los resultados que inevitablemente se presentará por efectos debidos al azar, estará en el intervalo dado por:

$$\bar{X}' \pm E_m \dots\dots\dots(1)$$

Donde:

\bar{X}' = Media de la población, representada por el promedio aritmético de los valores de la característica por controlar en todos los elementos que se produzcan con el mismo proceso (valor medio).

E_m = Error inherente del proceso de producción, definido por la ecuación:

$$E_m = \frac{t\sigma'}{\sqrt{n}} \dots\dots\dots(2)$$

En la que:

t = Factor que depende del nivel de confianza con el que se desea saber si el proceso está bajo control y por lo tanto define la probabilidad de que la variación de los valores medidos se deba a causas aleatorias.

σ' = Desviación estándar de la población. Desviación estándar determinada considerando todos los elementos que se produzcan con el mismo proceso.

n = Tamaño de la muestra. Número de elementos que integran cada muestra.

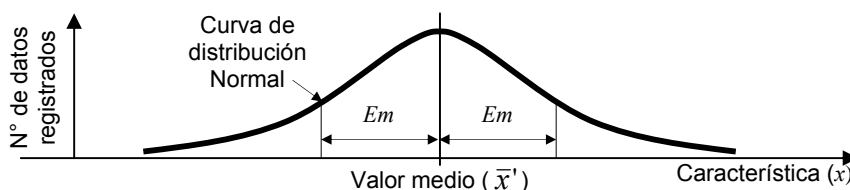


FIGURA 2.- Rango de variación de los resultados del proceso por causas aleatorias

B.4. PROCESO FUERA DE CONTROL ESTADÍSTICO

Cuando en un proceso de producción específico actúan una o más de las causas asignables a que se refiere el Inciso B.2.2., se dice que el proceso está *fuera de control estadístico*, en cuyo caso existirá una gran probabilidad de que las variaciones estén fuera del intervalo que se indica en la Fracción B.3. de este Manual, siendo entonces necesario identificar las causas que produjeron la salida de control, con el propósito de eliminarlas oportunamente para evitar la no conformidad con los requisitos establecidos. Esto hace necesario realizar el examen de los resultados obtenidos en todas las etapas del proceso, efectuando diariamente los análisis estadísticos que se requieran para controlarlo y detectar las deficiencias y desviaciones significativas que deban corregirse, tan pronto como ocurran, obteniendo así un proceso bajo control con el que se logra la conformidad de todos los requisitos, en el menor tiempo y al menor costo posible.

B.5. ANÁLISIS ESTADÍSTICOS

Los análisis estadísticos de los resultados que se obtengan de las mediciones y pruebas en todas las etapas de un proceso de producción específico, que permiten inferir si el proceso está bajo control estadístico o detectar oportunamente la ocurrencia de causas asignables que lo pongan fuera de control estadístico, se pueden realizar a través de cartas de control o mediante pruebas de hipótesis, como se describe en las Cláusulas D. y E. de este Manual, respectivamente.

C. REFERENCIAS

Son referencias de este Manual, las Normas y Manuales aplicables contenidos en los Libros LEG. *Legislación*, CTR. *Construcción*, CSV. *Conservación*, CAL. *Control y Aseguramiento de Calidad*, CMT. *Características de los Materiales* y MMP. *Métodos de Muestreo y Prueba de Materiales*, que forman parte de la Normativa SCT, particularmente las siguientes:

NORMAS Y MANUAL	DESIGNACIÓN
Ejecución de Obras	N·LEG·3
Ejecución de Supervisión de Obras	N·LEG·4
Subbases y Bases	N·CTR·CAR·1·04·002
Ejecución del Control de Calidad Durante la Construcción y/o Conservación	N·CAL·1·01
Criterios Estadísticos de Muestreo	M·CAL·1·02

D. CARTAS DE CONTROL

Las cartas de control a que se refieren las Fracciones D.4. y G.3. de la Norma N·LEG·3, *Ejecución de Obras*; D.2. de la Norma N·LEG·4, *Ejecución de Supervisión de Obras*; E.6. y E.7. de la Norma N·CAL·1·01, *Ejecución del Control de Calidad Durante la Construcción y/o Conservación*, son gráficas como la mostrada en la Figura 3 de este Manual, en las que en uno de sus ejes se indica el número de muestra y en el otro los valores del parámetro estadístico según el tipo de carta que se utilice, asociado a la característica medible o contable bajo control. En ella se grafican los valores de dicho parámetro obtenidos de cada muestra; uniendo con líneas los puntos dibujados se obtiene una poligonal abierta denominada *gráfica de tendencias*; en el valor correspondiente al promedio de las magnitudes del parámetro estadístico, se traza una paralela al eje de los números de las muestras, denominada *calidad promedio*, de la que depende la posición de los *límites estadísticos* entre los que se considera que las variaciones se deben a causas aleatorias, definiéndose así la *zona de aceptación*.

Esos límites estadísticos, que corresponden exclusivamente al proceso de producción que se controla, se proyectan hacia delante, de forma que, si los valores del parámetro estadístico de las siguientes muestras que se obtengan están en la zona de aceptación, existe una gran probabilidad de que sus variaciones se deban a causas aleatorias, pero si algún valor se ubica fuera de los límites estadísticos, existe la misma probabilidad de que se deba a una o varias causas asignables, momento en que se han de identificar esas causas para eliminarlas y mantener el proceso bajo control estadístico.

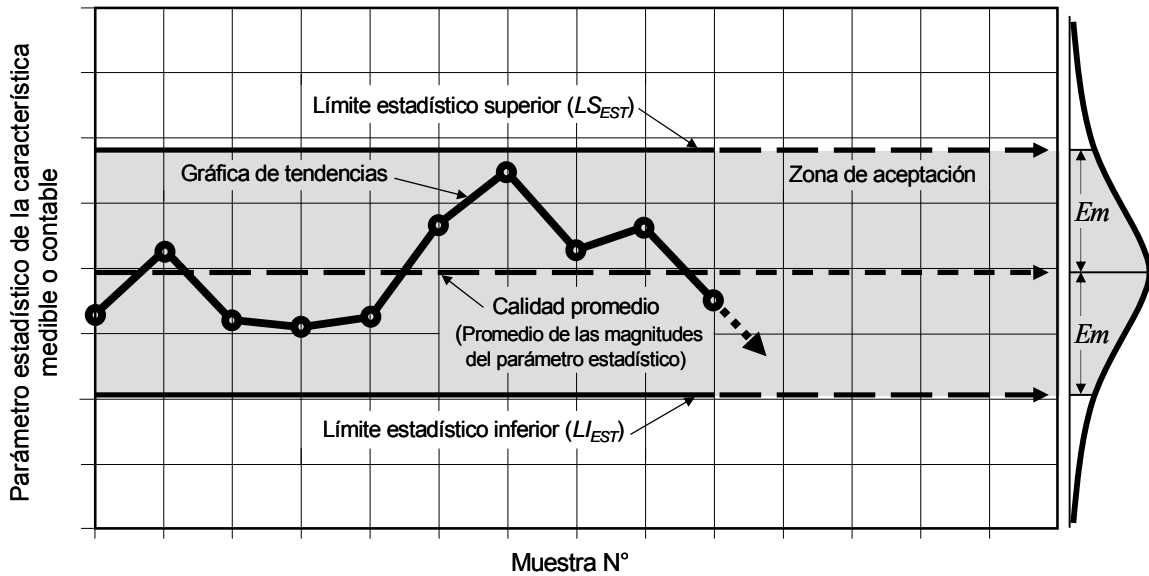


FIGURA 3.- Carta de control típica

Si a la carta de control de la Figura 3 se le agregan los *límites de especificación* que corresponden a las tolerancias especificadas y éstos resultan más amplios que los límites estadísticos, como se muestra en la Figura 4 de este Manual, entonces se generan *zonas de corrección* y *zonas de rechazo*, de manera que si los valores obtenidos de las muestras están dentro de los límites estadísticos significa que el proceso está bajo control, es decir, que sólo están actuando causas aleatorias, pero si algún valor se ubica en una zona de corrección, es muy probable que estén actuando una o varias causas asignables, sin que exista una no conformidad con el requisito establecido, pues aún se estará dentro de tolerancias, por lo que es momento de corregir el proceso; de lo contrario, se corre el riesgo de caer en zona de rechazo y generarse una no conformidad, teniendo que parar el proceso hasta que sea corregido.

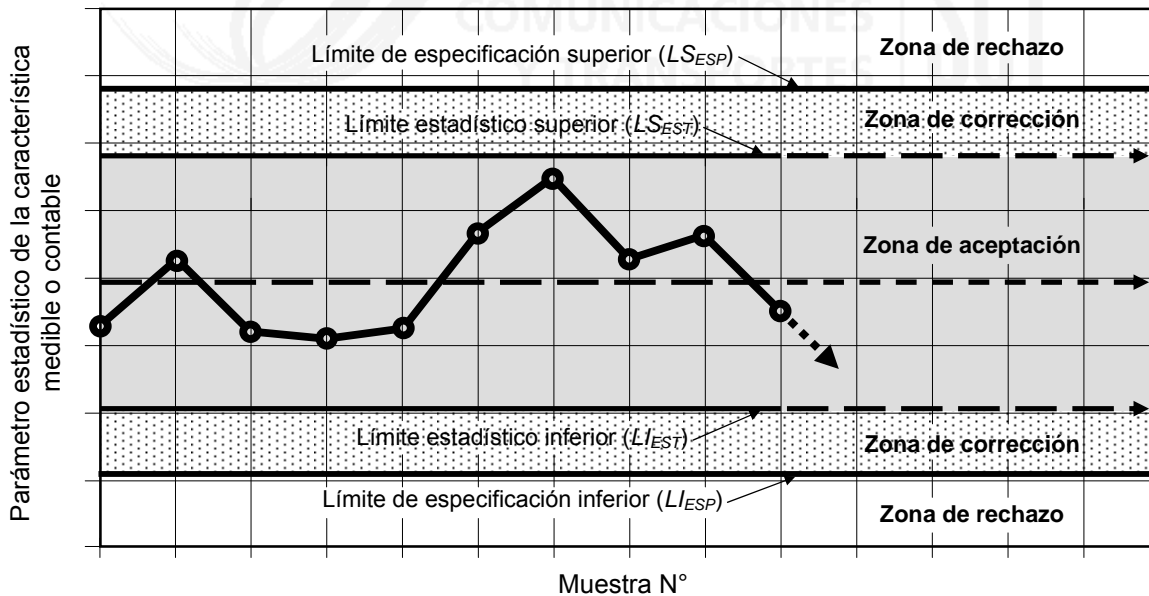


FIGURA 4.- Carta de control típica con límites de especificación

Si los límites de especificación forman una franja más estrecha que la de los límites estadísticos, significa que, o es necesario mejorar el proceso hasta lograr el angostamiento de la zona de aceptación, o bien, que las tolerancias especificadas no son realistas, lo que ha de demostrarse

técnicamente, en cuyo caso deberá revisarse la especificación correspondiente. Generalmente, cuando la zona de aceptación no está razonablemente centrada respecto a los límites de especificación, es necesario ajustar el proceso hasta lograr que la calidad promedio se aproxime al requisito establecido.

Como los límites estadísticos de una carta de control corresponden exclusivamente al proceso de producción que se controla, ellos se determinan analizando estadísticamente las características de los productos obtenidos a través del proceso, una vez que éste se ha establecido normalmente, pero al inicio de la producción no se cuenta con datos que permitan determinar esos límites, de forma que el control se puede iniciar utilizando límites estadísticos dados por la experiencia en otros procesos de producción similares, como se muestra en la Figura 5 de este Manual. Una vez que el proceso ha generado información suficiente, se obtienen los límites estadísticos correspondientes, pero ha de considerarse que, durante la etapa inicial de producción, es posible que los límites determinen una zona de aceptación más amplia que la del proceso establecido normalmente, pues esa etapa se puede considerar como de entrenamiento y aprendizaje, en cuyo caso, para calcular los límites del proceso normal, han de desecharse los datos de la etapa inicial que muestren una desviación importante respecto a los datos del proceso normal.

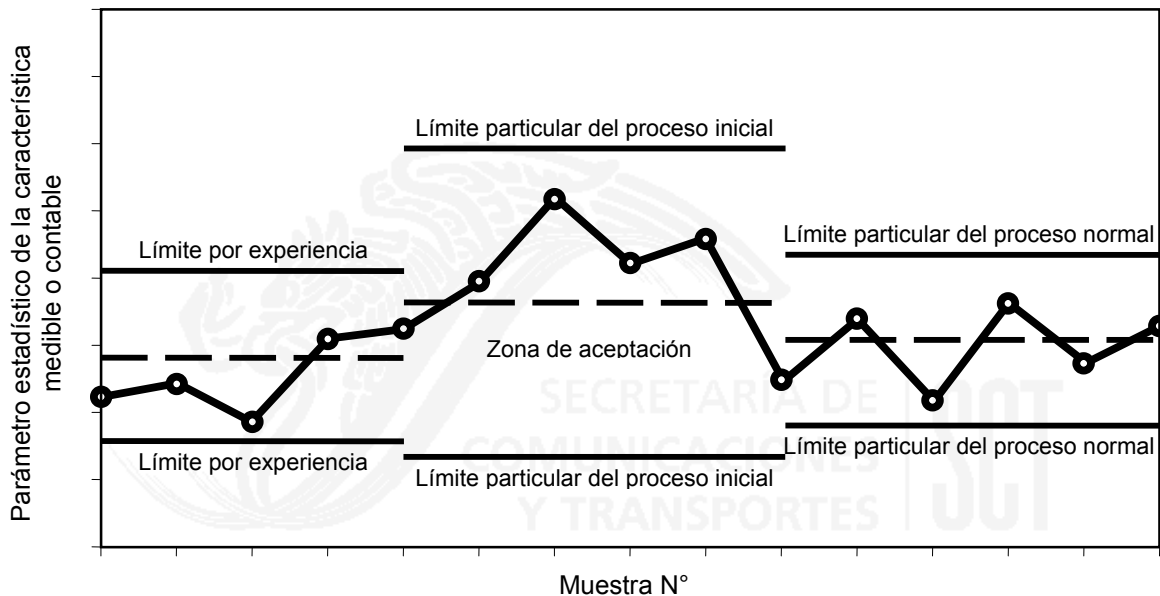


FIGURA 5.- Límites estadísticos para diferentes etapas del proceso

En teoría, los límites estadísticos calculados se mantienen constantes para un proceso establecido normalmente, lo que permite proyectarlos hacia el futuro, mientras el proceso no se altere, pues cualquier cambio en el procedimiento, en los insumos o en el equipo, lo convierte en un proceso diferente, con límites distintos. Si embargo, aunque dichos cambios no se presenten, es conveniente recalcular los límites periódicamente, por ejemplo, al término de cada semana de trabajo, ya que generalmente en los procesos de construcción existen muchas causas aleatorias, como las debidas a condiciones meteorológicas, que cambian con la época del año.

Las cartas de control más comúnmente utilizadas son las que se describen a continuación:

D.1. CARTAS DE CONTROL PARA CARACTERÍSTICAS MEDIBLES

D.1.1. Carta de Medias

La Carta de Medias se basa en la media de la población (\bar{X}'), es decir, el promedio aritmético de la característica por controlar en todos los elementos que se produzcan con el mismo proceso, que es un parámetro estadístico de centralización.

D.1.1.1. Gráfica de Tendencias en la Carta de Medias

La gráfica de tendencias en la Carta de Medias se obtiene dibujando las medias de cada muestra, que se determinan con la siguiente expresión:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \dots\dots\dots(3)$$

Donde:

\bar{X} = Media de la muestra. Promedio aritmético de la característica por controlar en todos los elementos de la muestra.

X_j = Característica por controlar del elemento j de la muestra.

n = Tamaño de la muestra. Número de elementos que integran cada muestra.

D.1.1.2. Calidad promedio en la Carta de Medias

La calidad promedio en la Carta de Medias, corresponde al valor del promedio de las medias de las muestras, es decir:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{X}_k}{N} \dots\dots\dots(4)$$

Donde:

$\bar{\bar{X}}$ = Promedio aritmético de las medias de la característica por controlar de todas las muestras.

\bar{X}_k = Media de la característica por controlar de la muestra k .

N = Número de muestras analizadas.

D.1.1.3. Límites estadísticos de la Carta de Medias

- a) Los límites estadísticos de la Carta de Medias limitan el intervalo definido por la ecuación (1), pero para obtener realmente la media de la población (\bar{X}'), así como la desviación estándar de la población (σ'), necesaria para determinar el error inherente conforme a la ecuación (2) de este Manual, se tendría que determinar la característica por controlar de todas y cada una de las unidades que se obtengan con el proceso, lo que sería muy costoso y resulta imposible, pues el examen no se realiza hasta el final del proceso sino durante su ejecución. Sin embargo, se ha visto que el promedio de las medias de las muestras es similar a la media de la población:

$$\bar{\bar{X}} \approx \bar{X}' \dots\dots\dots(5)$$

y la desviación estándar de la población se puede estimar con la siguiente ecuación:

$$\sigma' = \frac{\bar{\sigma}}{C_2} \dots\dots\dots(6)$$

Donde:

σ' = Desviación estándar de la población. Desviación estándar determinada considerando todos los elementos producidos con el mismo proceso.

$\bar{\sigma}$ = Promedio aritmético de la desviación estándar de la característica por controlar en todas las muestras analizadas.

C_2 = Parámetro determinado experimentalmente, que relaciona la desviación estándar de la población (σ') y el promedio de las desviaciones estándar de las muestras ($\bar{\sigma}$), obtenido de la Tabla 1 de este Manual, en función del tamaño de las muestras (n).

TABLA 1.- Factores para el cálculo de los límites estadísticos para cartas de características medibles

Tamaño de las muestras (n)	C_2	$1/C_2$	Cartas de Medias	Cartas de Desviaciones Estándar	
			A_1	B_3	B_4
2	0,5642	1,7725	3,760	0	3,267
3	0,7236	1,3820	2,394	0	2,568
4	0,7979	1,2533	1,880	0	2,266
5	0,8407	1,1894	1,596	0	2,089
6	0,8686	1,1513	1,41	0,03	1,97
7	0,8882	1,1259	1,28	0,12	1,88
8	0,9027	1,1078	1,17	0,19	1,81
9	0,9139	1,0942	1,09	0,24	1,76
10	0,9227	1,0838	1,03	0,28	1,72
11	0,9300	1,0753	0,97	0,32	1,68
12	0,9359	1,0685	0,93	0,35	1,65
13	0,9410	1,0627	0,88	0,38	1,62
14	0,9453	1,0579	0,85	0,41	1,59
15	0,9490	1,0537	0,82	0,43	1,57
16	0,9523	1,0501	0,79	0,45	1,55
17	0,9551	1,0470	0,76	0,47	1,53
18	0,9576	1,0443	0,74	0,48	1,52
19	0,9599	1,0418	0,72	0,50	1,50
20	0,9619	1,0396	0,70	0,51	1,49

- b) El promedio de las desviaciones estándar de las muestras se determina con la ecuación:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{k=1}^N \sigma_k}{N} \dots\dots\dots(7)$$

Donde:

$\bar{\sigma}$ = Promedio de las desviaciones estándar de las muestras.

σ_k = Desviación estándar de la característica por controlar de la muestra k .

N = Número de muestras analizadas.

- c) La desviación estándar de cada muestra se calcula con la ecuación:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}} \dots\dots\dots(8)$$

Donde:

σ = Desviación estándar de la muestra.

\bar{X} = Media de la muestra obtenida con la ecuación (3) de este Manual.

X_j = Característica por controlar del elemento j de la muestra.

n = Tamaño de la muestra. Número de elementos que integran cada muestra.

- d) Si se sustituye la ecuación (6) en la (2) y ésta junto con la (5) en la (1) de este Manual, los límites estadísticos, superior e inferior, para la Carta de Medias, serán respectivamente:

$$LS_{EST} = \bar{X} + \frac{t\bar{\sigma}}{C_2\sqrt{n}} \dots\dots\dots(9)$$

$$LI_{EST} = \bar{X} - \frac{t\bar{\sigma}}{C_2\sqrt{n}} \dots\dots\dots(10)$$

El factor t , que depende del nivel de confianza con el que se desea saber si el proceso está bajo control y por lo tanto define la probabilidad de que la variación de los valores medidos se deba a causas aleatorias, se obtiene de la Tabla 2 de este Manual.

TABLA 2.- Valores del factor t

Nivel de confianza (%)	t
99,7	3,00
98,0	2,33
95,5	2,00
95,0	1,96
90,0	1,64
80,0	1,28
68,2	1,00
50,0	0,67

- e) En general, el nivel de confianza que se ha de utilizar para las cartas de control será de 99,7%, es decir, $t = 3$, con lo que se tendrá una probabilidad de que las variaciones dentro de la zona de aceptación se deba a causas aleatorias, del 99,7% y la misma probabilidad de que las desviaciones fuera de esa zona se deban a causas asignables. Si en las ecuaciones (9) y (10) se considera $t = 3$ y se define el factor A_1 como:

$$A_1 = \frac{3}{C_2\sqrt{n}} \dots\dots\dots(11)$$

Entonces los límites estadísticos, superior e inferior, serán respectivamente:

$$LS_{EST} = \bar{X} + A_1\bar{\sigma} \dots\dots\dots(12)$$

$$LI_{EST} = \bar{X} - A_1\bar{\sigma} \dots\dots\dots(13)$$

Los valores del factor A_1 , para $t = 3$, pueden obtenerse de la Tabla 1 de este Manual, según el tamaño de las muestras (n).

- f) Como los límites estadísticos de la Carta de Medias dependen del tamaño de las muestras, para que puedan ser proyectados al futuro se requiere que sean líneas rectas, siendo entonces indispensable que todas las muestras tengan el mismo tamaño, lo que no siempre es posible en los procesos de construcción, en cuyo caso se pueden utilizar las Cartas de Medias Móviles a que se refiere el Inciso D.1.3. de este Manual.

D.1.1.4. Ejemplo 1. Utilización de la Carta de Medias

Supóngase que se construye la base hidráulica de una carretera, para la que el proyecto especifica un grado de compactación de 95% de la masa volumétrica seca máxima obtenida mediante la prueba AASHTO Modificada, con una tolerancia de $\pm 3\%$, y que la compactación de la base hidráulica se controlará estadísticamente mediante una Carta de Medias, con nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$), tomando muestras en tramos de 250 m de longitud y 11 m de ancho, de 5 calas cada una, ubicadas al azar conforme a lo indicado en el Manual M·CAL·1·02, *Criterios Estadísticos de Muestreo*, según se establece en la Fracción H.3. de la Norma N·CTR·CAR·1·04·002, *Subbases y Bases*, como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta de Medias, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, el grado de compactación, trazando a partir de los valores correspondientes al grado especificado y sus tolerancias, las líneas que respectivamente indiquen el valor especificado y los límites superior (LS_{ESP}) e inferior (LI_{ESP}) de especificación que determinen las zonas de rechazo, como se muestra en la Figura 6 de este Manual.

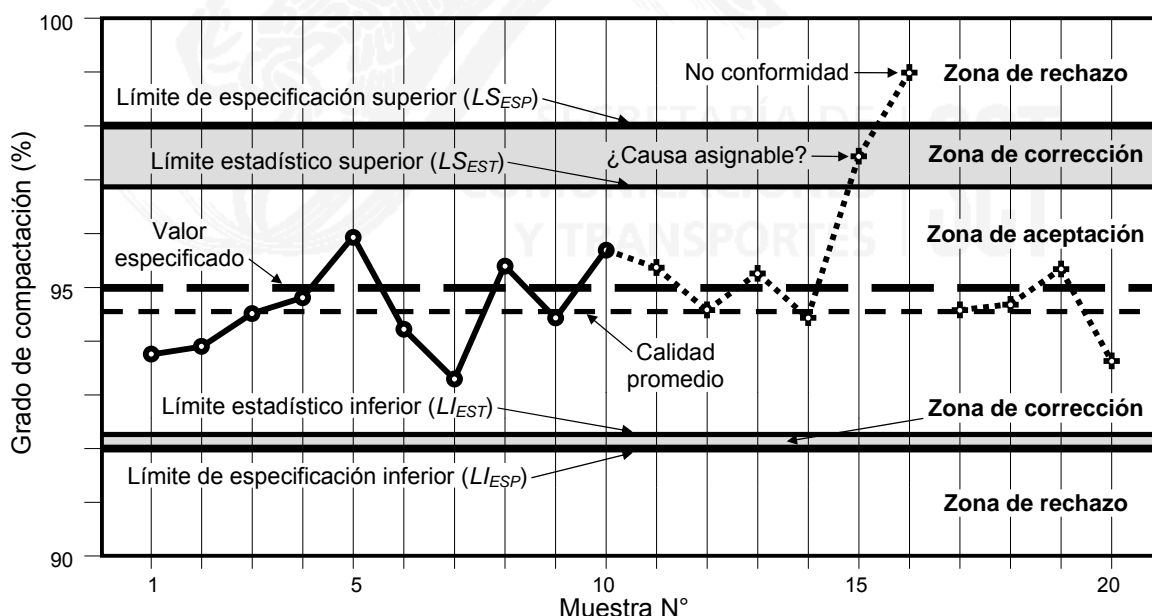


FIGURA 6.- Carta de Medias para los grados de compactación del Ejemplo 1

- b) Se examinan los resultados del proceso, realizando las pruebas de compactación que integren las muestras. Los datos obtenidos de las pruebas de cada muestra, se anotan en un formato como el mostrado en la Tabla 3, calculando la media (\bar{x}) y la desviación estándar (σ) de cada muestra, con las ecuaciones (3) y (8), respectivamente, y en la carta de control se dibujan las medias calculadas para definir la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas continuas en la Figura 6 de este Manual.

TABLA 3.- Parámetros estadísticos de los Ejemplos 1 y 2

Muestra N°	Grado de compactación (%)					Media de la muestra	Desviación estándar de la muestra
	Prueba N°						
(n)	1	2	3	4	5	(\bar{X})	(σ)
1	92,6	92,6	96,1	93,5	93,9	93,74	1,44
2	94,1	95,1	93,2	94,7	92,4	93,90	1,11
3	92,5	94,4	93,5	97,0	95,0	94,49	1,68
4	97,5	92,1	97,1	93,5	93,7	94,78	2,38
5	93,3	96,5	96,4	97,5	96,0	95,95	1,59
6	95,7	92,4	95,2	94,7	93,0	94,22	1,43
7	94,9	93,0	92,7	92,8	92,9	93,26	0,92
8	96,8	94,4	97,4	96,3	92,2	95,41	2,13
9	95,6	95,2	93,9	93,2	94,0	94,40	0,97
10	96,1	96,4	95,6	95,2	95,0	95,69	0,60
Promedio de las medias ($\bar{\bar{X}}$)						94,58	
Promedio de las desviaciones estándar ($\bar{\sigma}$)							1,43
11	97,5	95,0	92,1	96,3	95,8	95,34	2,01
12	92,7	96,5	94,8	95,1	93,8	94,58	1,43
13	96,7	94,6	93,7	97,4	94,0	95,26	1,67
14	96,9	95,8	95,1	92,2	92,1	94,43	2,19
15	99,2	97,0	96,3	97,8	96,7	97,38	1,16
16	99,5	98,6	96,6	100,1	100,0	98,97	1,48
17	96,5	92,8	94,5	95,2	94,0	94,58	1,39
18	96,2	94,0	92,6	97,5	93,0	94,66	2,10
19	95,9	97,1	95,5	95,8	92,3	95,32	1,82
20	92,6	97,0	93,9	92,4	92,4	93,63	1,98

- c) Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras 1 a 10 de la Tabla 3 y de la Figura 6) se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con las ecuaciones (4) y (7) se calculan el promedio de las medias ($\bar{\bar{X}}$) y el promedio de las desviaciones estándar ($\bar{\sigma}$), como se muestra en la Tabla 3. De la Tabla 1 se selecciona el factor A_1 que corresponda al tamaño de las muestras que se utiliza (n), que en este ejemplo, para $n = 5$, $A_1 = 1,596$. Con este factor y dichos parámetros estadísticos, mediante las ecuaciones (12) y (13) de este Manual, se calculan los límites estadísticos correspondientes:

$$LS_{EST} = \bar{\bar{X}} + A_1 \bar{\sigma} = 94,58 + 1,596(1,43) = 96,86$$

$$LI_{EST} = \bar{\bar{X}} - A_1 \bar{\sigma} = 94,58 - 1,596(1,43) = 92,30$$

- d) A partir de los valores del promedio de las medias ($\bar{\bar{X}} = 94,58$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 96,86$ y $LI_{EST} = 92,30$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como las zonas de aceptación y de rechazo, proyectándolas hacia delante, como se muestra en la Figura 6 de este Manual.
- e) En la medida en que se toman las siguientes muestras (11 en adelante de la Tabla 3), se calculan con las ecuaciones (3) y (8), la media (\bar{X}) y la desviación estándar (σ) de cada muestra, respectivamente, e inmediatamente se dibuja la media calculada en la carta de control, continuando la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas discontinuas en la Figura 6 de este Manual.

- f) Como se observa en la Figura 6 de este Manual, cuando se dibujó la media de la muestra 15, ésta se ubicó en la zona de corrección superior, indicando la existencia de una o varias causas asignables. En ese momento se debieron identificar dichas causas, con el propósito de eliminarlas; sin embargo, como no se aplicaron las medidas correctivas pertinentes, esas causas siguieron actuando, de forma que la media de la muestra 16 se alojó en la zona de rechazo, manifestándose entonces la no conformidad con el requisito establecido, por lo que en ese momento el tramo correspondiente fue rechazado, se detuvo el proceso mientras se identificaron las causas que lo pusieron fuera de control estadístico y se aplicaron las medidas correctivas. Hecho lo anterior, se reinició el proceso con resultados dentro de la zona de aceptación.
- g) Dada la conveniencia de recalcular periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta la muestra 20, se repetiría el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando los datos de la muestra 1 a la 20, pero eliminado los de las muestras 15 y 16, que manifestaron la existencia de causas asignables ajenas al proceso normal. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la muestra 20 hasta la muestra con la que se vuelvan a determinar.

D.1.2. Carta de Desviaciones Estándar

La Carta de Desviaciones Estándar se basa en la desviación estándar de la población (σ'), es decir, la desviación estándar de la característica por controlar en todos los elementos producidos con el mismo proceso, que es un parámetro estadístico de dispersión.

D.1.2.1. Gráfica de tendencias en la Carta de Desviaciones Estándar

La gráfica de tendencias en la Carta de Desviaciones Estándar se obtiene dibujando las desviaciones estándar de cada muestra (σ), que se determinan con la ecuación (8) de este Manual.

D.1.2.2. Calidad promedio en la Carta de Desviaciones Estándar

La calidad promedio en la Carta de Desviaciones Estándar, corresponde al valor del promedio de las desviaciones estándar de las muestras ($\bar{\sigma}$), calculado con la ecuación (7) de este Manual.

D.1.2.3. Límites estadísticos de la Carta de Desviaciones Estándar

Los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) de la Carta de Desviaciones Estándar, que limitan la zona de aceptación, están dados por las ecuaciones:

$$LS_{EST} = \bar{\sigma} \left(1 + \frac{t}{C_2 \sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2n C_2^2} \right) \dots\dots\dots(14)$$

$$LI_{EST} = \bar{\sigma} \left(1 - \frac{t}{C_2 \sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2n C_2^2} \right) \dots\dots\dots(15)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en el Inciso D.1.1.

Si en las ecuaciones (14) y (15) se considera $t = 3$ (nivel de confianza de 99,7%, según se señala en el Punto e) del Párrafo D.1.1.3.) y se definen los factores B_3 y B_4 como:

$$B_3 = 1 - \frac{3}{C_2 \sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2n C_2^2} \dots\dots\dots(16)$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{C_2 \sqrt{2n}} \sqrt{2(n-1) - 2n C_2^2} \dots\dots\dots(17)$$

Entonces los límites estadísticos, superior e inferior, serán respectivamente:

$$LS_{EST} = B_4 \bar{\sigma} \dots\dots\dots(18)$$

$$LI_{EST} = B_3 \bar{\sigma} \dots\dots\dots(19)$$

Los valores de los factores B_3 y B_4 , para $t = 3$, pueden obtenerse de la Tabla 1, según el tamaño de las muestras (n), en la que se observa que el valor de B_3 para muestras hasta de 5 elementos es cero, por lo que el límite estadístico inferior en esos casos coincide con el eje de las muestras, ese valor se va incrementando a partir de muestras de 6 elementos, mientras que el valor de B_4 va decreciendo desde muestras de 2 elementos, de forma que generalmente los límites estadísticos no son equidistantes respecto a la calidad promedio.

Como también los límites estadísticos de la Carta de Desviaciones Estándar dependen del tamaño de las muestras, para que puedan ser proyectados al futuro se requiere que sean líneas rectas, siendo entonces indispensable que todas las muestras tengan el mismo tamaño, lo que no siempre es posible en los procesos de construcción, en cuyo caso se pueden utilizar las Cartas de Desviaciones Estándar Móviles a que se refiere el Inciso D.1.4. de este Manual.

D.1.2.4. Ejemplo 2. Utilización de la Carta de Desviaciones Estándar

Supóngase que para el caso que se ejemplifica en el Párrafo D.1.1.4. de este Manual y con base en las mismas muestras, la compactación de la base hidráulica se controlará estadísticamente mediante una Carta de Desviaciones Estándar, con nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$), como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta de Desviaciones Estándar, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, la desviación estándar, como se muestra en la Figura 7 de este Manual. En el caso del grado de compactación que se ejemplifica no se establece el nivel de calidad en términos de la desviación estándar, sino de las tolerancias, por lo que en esta carta no se tendrán límites de especificación, pero en los casos donde sí se indique el cumplimiento de este parámetro estadístico, se trazan a partir de los valores especificados, las líneas que respectivamente indiquen los límites superior (LS_{ESP}) e inferior (LI_{ESP}) de especificación que determinen las zonas de rechazo.

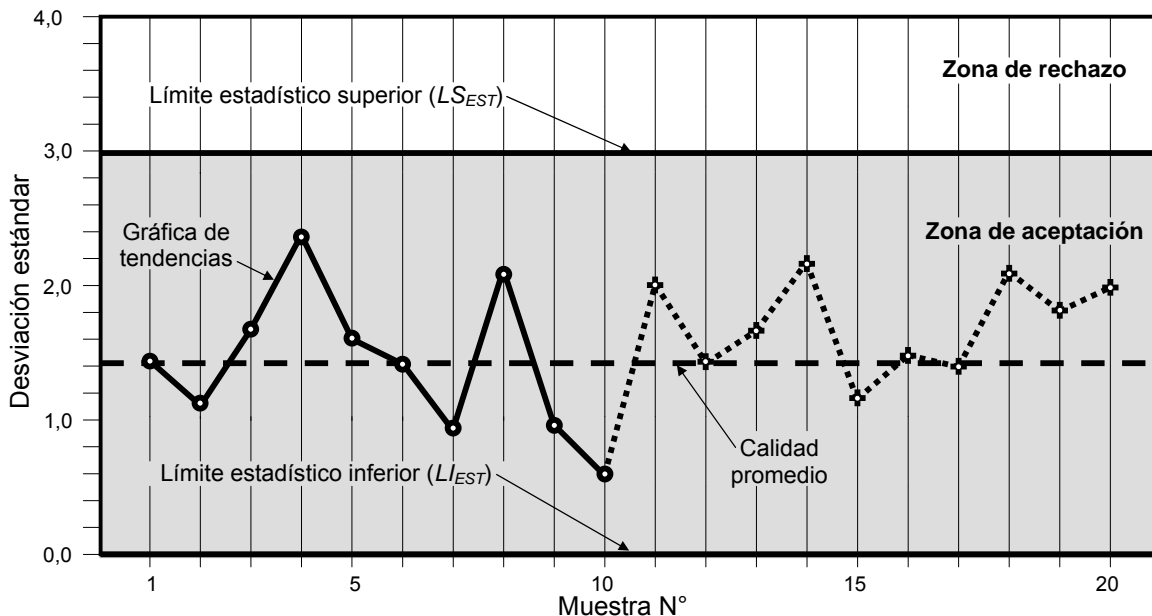


FIGURA 7.- Carta Desviaciones Estándar para los grados de compactación del Ejemplo 2

- b) De los resultados del proceso obtenidos de las pruebas de compactación que se indican en la Tabla 3, se calculan la media (\bar{X}) y la desviación estándar (σ) de cada muestra, con las ecuaciones (3) y (8), respectivamente, y en la carta de control se dibujan las desviaciones estándar calculadas para definir la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas continuas en la Figura 7 de este Manual.
- c) Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras 1 a 10 de la Tabla 3 y de la Figura 7), se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con la ecuación (7) se calcula el promedio de las desviaciones estándar ($\bar{\sigma}$), como se muestra en la Tabla 3. De la Tabla 1 se seleccionan los factores B_3 y B_4 que correspondan al tamaño de las muestras que se utiliza (n), que en este ejemplo, para $n = 5$, $B_3 = 0$ y $B_4 = 2,089$. Con estos factores y el promedio de las desviaciones estándar, mediante las ecuaciones (18) y (19) de este Manual, se calculan los límites estadísticos correspondientes:

$$LS_{EST} = B_4 \bar{\sigma} = 2,089(1,43) = 2,99$$

$$LI_{EST} = B_3 \bar{\sigma} = 0(1,43) = 0$$

- d) A partir de los valores del promedio de las desviaciones estándar ($\bar{\sigma} = 1,43$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 2,99$ y $LI_{EST} = 0$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como la zona de aceptación, proyectándolas hacia delante, como se muestra en la Figura 7 de este Manual.
- e) En la medida en que se toman las siguientes muestras (11 en delante de la Tabla 3), se calculan con las ecuaciones (3) y (8), la media y la desviación estándar de cada muestra, respectivamente e inmediatamente se dibuja la desviación estándar calculada en la carta de control, continuando la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas discontinuas en la Figura 7 de este Manual.
- f) Como se observa en la Figura 7 de este Manual, las desviaciones estándar de todas las muestras se alojaron en la zona de aceptación, por lo que se puede afirmar que, desde el punto de vista de la dispersión, el proceso está bajo control estadístico, es decir, sólo actúan causas aleatorias propias del mismo.
- g) Dada la conveniencia de recalcular periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta la muestra 20, se repetiría el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando los datos de la muestra 1 a la N° 20. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la muestra 20 hasta la muestra con la que se vuelvan a determinar. Cabe señalar que, aunque en la Carta de Desviaciones Estándar no se observó la existencia de causas asignables, dichas causas sí se apreciaron en la Carta de Medias del Párrafo D.1.1.4., que se elaboró con los mismos datos de grados de compactación, por lo que, para este ejemplo, el recálculo de los límites estadísticos de la Carta de Desviaciones Estándar se haría eliminado los datos de las muestras N° 15 y N° 16, que manifestaron evidencias de causas asignables ajenas al proceso normal.

D.1.3. Carta de Medias Móviles

Como ya se mencionó anteriormente, para que los límites estadísticos de las cartas de control puedan proyectarse hacia el futuro, deben ser rectos, para lo que es necesario que todas las muestras tengan el mismo tamaño. Sin embargo, en la construcción es frecuente tomar muestras de diferente tamaño, según el volumen ejecutado durante el día, en cuyo caso, se puede utilizar la Carta de Medias Móviles, mediante la que se analizan muestras virtuales de tamaño uniforme, que se constituyen utilizando todas las muestras realmente obtenidas. Esta carta se basa en los mismos principios descritos en el Inciso D.1.1. de este Manual, con las siguientes modificaciones:

D.1.3.1. Muestras virtuales

Cuando las muestras son de diferentes tamaños, con la ecuación (3) de este Manual se determina la media (\bar{X}) de cada una; se define el tamaño de las muestras virtuales que se desea (n_m) y ellas se integran con las medias de las n_m últimas muestras reales, como se indica en la Tabla 4, para $n_m = 5$.

TABLA 4.- Integración de muestras virtuales de 5 elementos ($n_m = 5$)

Muestras reales		Muestras virtuales	
Muestra real N° (N)	Media (\bar{X}_k)	Muestra virtual N° (N_m)	Integración de la muestra
1	\bar{X}_1	---	---
2	\bar{X}_2	---	---
3	\bar{X}_3	---	---
4	\bar{X}_4	---	---
5	\bar{X}_5	1	$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$ y \bar{X}_5
6	\bar{X}_6	2	$\bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5$ y \bar{X}_6
7	\bar{X}_7	3	$\bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5, \bar{X}_6$ y \bar{X}_7
8	\bar{X}_8	4	$\bar{X}_4, \bar{X}_5, \bar{X}_6, \bar{X}_7$ y \bar{X}_8
9	\bar{X}_9	5	$\bar{X}_5, \bar{X}_6, \bar{X}_7, \bar{X}_8$ y \bar{X}_9
10	\bar{X}_{10}	6	$\bar{X}_6, \bar{X}_7, \bar{X}_8, \bar{X}_9$ y \bar{X}_{10}

D.1.3.2. Gráfica de tendencias en la Carta de Medias Móviles

La gráfica de tendencias en la Carta de Medias Móviles se obtiene dibujando las medias móviles de cada muestra virtual, que se determinan con la siguiente expresión:

$$\bar{X}_m = \frac{\sum_{k=1}^{n_m} \bar{X}_k}{n_m} \dots\dots\dots(20)$$

Donde:

\bar{X}_m = Media móvil de la muestra virtual. Promedio aritmético de las medias de las muestras reales que integran la muestra virtual.

\bar{X}_k = Media de la muestra real k que integra la muestra virtual.

n_m = Tamaño de la muestra virtual. Número de elementos que integran cada muestra virtual.

D.1.3.3. Calidad promedio en la Carta de Medias Móviles

La calidad promedio en la Carta de Medias Móviles, corresponde al valor del promedio de las medias móviles de las muestras virtuales, es decir:

$$\bar{X}_m = \frac{\sum_{l=1}^{N_m} \bar{X}_{ml}}{N_m} \dots\dots\dots(21)$$

Donde:

$\bar{\bar{X}}_m$ = Promedio aritmético de las medias móviles de las muestras virtuales.

\bar{X}_{ml} = Media móvil de la muestra virtual l .

N_m = Número de muestras virtuales analizadas.

D.1.3.4. Límites estadísticos de la Carta de Medias

- a) Para determinar los límites estadísticos de la Carta de Medias Móviles, se considera que el promedio de las medias móviles de las muestras virtuales es similar a la media de la población:

$$\bar{\bar{X}}_m \approx \bar{X}' \dots\dots\dots(22)$$

y que la desviación estándar de la población se puede estimar con la siguiente ecuación:

$$\sigma' = \frac{\bar{\sigma}_m}{C_2} \dots\dots\dots(23)$$

Donde:

σ' = Desviación estándar de la población. Desviación estándar determinada considerando todos los elementos producidos con el mismo proceso.

$\bar{\sigma}_m$ = Promedio aritmético de las desviaciones estándar móviles de todas las muestras virtuales.

C_2 = Parámetro determinado experimentalmente, que relaciona la desviación estándar de la población (σ') y el promedio de las desviaciones estándar móviles de las muestras virtuales ($\bar{\sigma}_m$), obtenido de la Tabla 1 de este Manual, en función del tamaño de las muestras móviles (donde $n = n_m$).

- b) El promedio de las desviaciones estándar móviles de las muestras virtuales se determina con la ecuación:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{\sum_{l=1}^{N_m} \sigma_{ml}}{N_m} \dots\dots\dots(24)$$

Donde:

$\bar{\sigma}_m$ = Promedio aritmético de las desviaciones estándar móviles de las muestras virtuales.

σ_{ml} = Desviación estándar móvil de la muestra virtual l .

N_m = Número de muestras virtuales analizadas.

- c) La desviación estándar móvil de cada muestra virtual se calcula con la ecuación:

$$\sigma_{ml} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n_m} (\bar{X}_k - \bar{X}_{ml})^2}{n_m - 1}} \dots\dots\dots(25)$$

Donde:

σ_{ml} = Desviación estándar móvil de la muestra virtual l .

\bar{X}_{ml} = Media móvil de la muestra virtual, obtenida con la ecuación (20) de este Manual l .

\bar{X}_k = Media de la muestra real k que integra la muestra virtual l .

n_m = Tamaño de la muestra virtual. Número de elementos que integran cada muestra virtual.

- d) Si se sustituye la ecuación (23) en la (2) y ésta junto con la (22) en la (1) de este Manual, los límites estadísticos, superior e inferior, para la Carta de Medias Móviles, serán respectivamente:

$$LS_{EST} = \bar{X}_m + \frac{t\bar{\sigma}_m}{C_2\sqrt{n_m}} \dots\dots\dots(26)$$

$$LI_{EST} = \bar{X}_m - \frac{t\bar{\sigma}_m}{C_2\sqrt{n_m}} \dots\dots\dots(27)$$

El factor t que depende del nivel de confianza con el que se desea trabajar, mismo que define la probabilidad de que la variación se deba a causas aleatorias, se obtiene de la Tabla 2 de este Manual.

- e) Si se considera $t = 3$ (nivel de confianza de 99,7%, según se indica en el Punto e) del Párrafo D.1.1.3.), el factor A_1 de la Tabla 1 de este Manual, será:

$$A_1 = \frac{3}{C_2\sqrt{n_m}} \dots\dots\dots(28)$$

y los límites estadísticos, superior e inferior, serán respectivamente:

$$LS_{EST} = \bar{X}_m + A_1\bar{\sigma}_m \dots\dots\dots(29)$$

$$LI_{EST} = \bar{X}_m - A_1\bar{\sigma}_m \dots\dots\dots(30)$$

- f) Debido a que las muestras virtuales se integran con los datos de las muestras reales, existe un desfazamiento entre esos datos y las medias móviles que definen la gráfica de tendencias, de manera que si alguna de ellas se aloja fuera de la zona de aceptación, indica en forma diferida, que actúan o actuaron una o varias causas asignables, pero no señala el momento en que ello ocurrió, por lo que, para ayudar a ubicar esas causas también es conveniente graficar en la Carta de Medias Móviles, las medias de las muestras reales, como en la Figura 8 de este Manual.

D.1.3.5. Ejemplo 3. Utilización de la Carta de Medias Móviles

Supóngase que en el caso de la base hidráulica a que se refiere el Párrafo D.1.1.4. de este Manual, las muestras se tomarán diariamente en el tramo de la longitud lograda cada día, de forma que, de acuerdo con la Fracción H.3. de la Norma N-CTR-CAR-1-04-002, *Subbases y Bases*, el número de calas de cada muestra siempre es diferente, por lo que el control estadístico se hará mediante una carta de Medias Móviles, con nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$) y muestras virtuales de 5 elementos ($n_m = 5$), como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta de Medias Móviles, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras reales, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, el grado de compactación, trazando a partir de los valores correspondientes al grado especificado y sus tolerancias, las líneas que, respectivamente, indiquen el valor especificado y los límites superior (LS_{ESP}) e inferior (LI_{ESP}) de especificación que determinen las zonas de rechazo, como se muestra en la Figura 8 de este Manual.

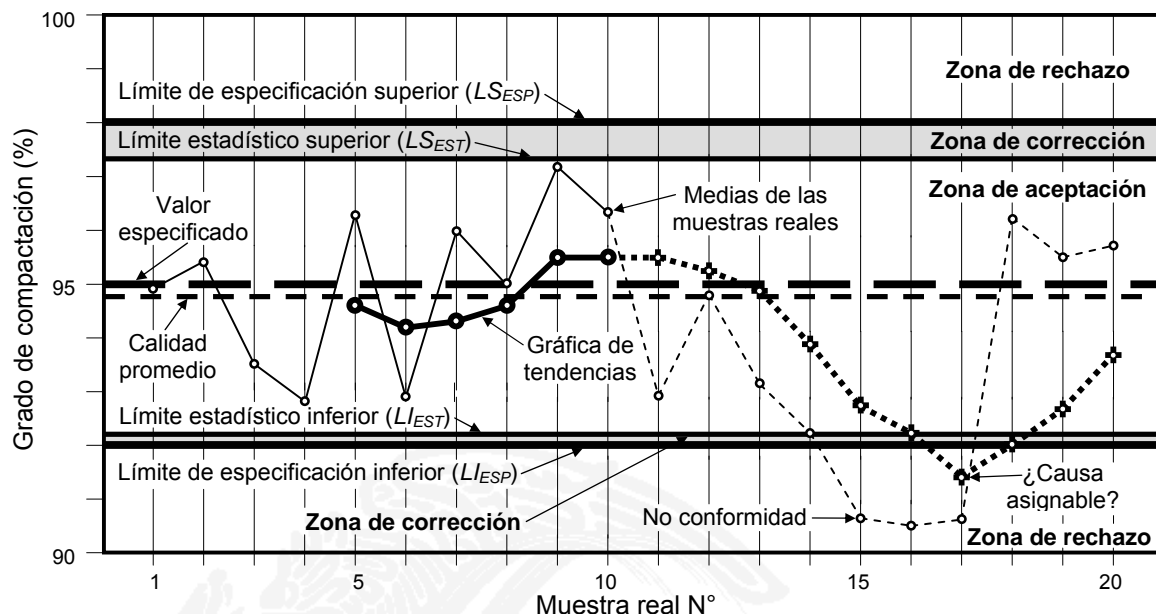


FIGURA 8.- Carta de Medias Móviles para los grados de compactación del Ejemplo 3

- b) Una vez integradas las muestras reales con las pruebas de compactación ejecutadas durante el examen del proceso, cuyos resultados se anotan en un formato similar al mostrado en la Tabla 3, se calcula con la ecuación (3) la media (\bar{X}) de cada muestra real, la que también se anota en un formato como el de la Tabla 5, para calcular con las ecuaciones (20) y (25), la media móvil (\bar{X}_m) y la desviación estándar móvil (σ_m), respectivamente, de cada muestra virtual de 5 elementos ($n_m = 5$). En la carta de control se dibujan las medias calculadas de las muestras reales, uniéndolas con líneas continuas delgadas, así como las medias móviles que definen la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas continuas gruesas en la Figura 8 de este Manual.
- c) Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras 1 a 10 de la Tabla 5 y de la Figura 8, se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con las ecuaciones (21) y (24) se calculan el promedio de las medias móviles ($\bar{\bar{X}}_m$) y el promedio de las desviaciones estándar móviles ($\bar{\sigma}_m$), como se muestra en la Tabla 5. De la Tabla 1 se selecciona el factor A_1 que corresponda al tamaño de las muestras virtuales que se utiliza (n_m), que en este ejemplo, para $n_m = 5$, $A_1 = 1,596$. Con este factor y dichos parámetros estadísticos, mediante las ecuaciones (29) y (30) de este Manual, se calculan los límites estadísticos correspondientes:

$$LS_{EST} = \bar{\bar{X}}_m + A_1 \bar{\sigma}_m = 94,77 + 1,596(1,61) = 97,34$$

$$LI_{EST} = \bar{\bar{X}}_m - A_1 \bar{\sigma}_m = 94,77 - 1,596(1,61) = 92,20$$

TABLA 5.- Cálculo de las medias móviles y desviaciones estándar móviles de muestras virtuales de 5 elementos ($n_m = 5$)

Muestras reales			Muestras virtuales	
N° (N)	Tamaño (n)	Media (\bar{X})	Media móvil (\bar{X}_m)	Desviación estándar móvil (σ_m)
1	7	94,9	---	---
2	6	95,4	---	---
3	3	93,5	---	---
4	10	92,8	---	---
5	2	96,3	94,58	1,42
6	2	92,9	94,18	1,58
7	9	96,0	94,30	1,71
8	3	95,0	94,60	1,67
9	6	97,2	95,48	1,64
10	11	96,3	95,48	1,64
Promedio de las medias móviles ($\bar{\bar{X}}_m$)			94,77	
Promedio de las desviaciones estándar móviles ($\bar{\sigma}_m$)				1,61
11	8	92,9	95,48	1,64
12	8	94,8	95,24	1,63
13	7	93,1	94,86	1,90
14	11	92,2	93,86	1,67
15	6	90,6	92,72	1,52
16	10	90,5	92,24	1,80
17	3	90,6	91,40	1,19
18	11	96,2	92,02	2,44
19	9	95,5	92,68	2,90
20	6	95,7	93,70	2,89

- d) A partir de los valores del promedio de las medias móviles ($\bar{\bar{X}}_m = 94,77$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 97,34$ y $LI_{EST} = 92,20$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como las zonas de aceptación y de rechazo, proyectándolas hacia delante, como se muestra en la Figura 8 de este Manual.
- e) En la medida en que se integran las siguientes muestras reales, cuyos resultados se anotan en un formato similar al mostrado en la Tabla 3, se calcula con la ecuación (3) la media (\bar{X}) de cada muestra real, la que también se anota en el formato de la Tabla 5 (muestras 11 en adelante). Se calculan con las ecuaciones (20) y (25), la media móvil (\bar{X}_m) y la desviación estándar móvil (σ_m) de cada muestra virtual, respectivamente e inmediatamente se dibujan en la carta de control, tanto la media calculada de la muestra real como la media móvil de la muestra virtual, continuando la gráfica de las medias de las muestras reales con líneas discontinuas delgadas y la gráfica de tendencias con líneas discontinuas gruesas, como se muestra en la Figura 8 de este Manual.
- f) Como se observa en la Figura 8, la media móvil de la muestra virtual correspondiente a la muestra real N° 17, se ubicó en la zona de rechazo inferior y, por ende, fuera de la zona de aceptación, indicando la existencia de una o varias causas asignables, pero debido a que esa información es diferida, como se explica en el Punto f) del Párrafo D.1.3.5. de este Manual, las causas asignables

seguramente se presentaron anteriormente, por lo que es indispensable observar permanentemente la tendencia de las medias de las muestras reales, para detectar oportunamente la posible ocurrencia de las causas asignables y evitar que las medias de las muestras reales se ubiquen en la zona de rechazo, es decir, fuera de especificación, como ocurrió en este ejemplo desde la muestra real N° 15. También se puede apreciar en dicha Figura, que la pendiente descendente de la gráfica de tendencias se incrementa fuertemente a partir de la media móvil correspondiente a la muestra real N° 13, por lo que, si en el momento de dibujar la media móvil de la muestra real N° 14, se hubiera revisado el proceso, muy probablemente se habrían detectado y eliminado oportunamente las causas asignables.

- g) Dada la conveniencia de recalcular periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta la muestra real N° 20, se repetiría el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando los datos de la muestra real N° 1 a la N° 20, pero eliminando los de las muestras reales N° 14 a N° 17, que manifestaron la existencia de causas asignables ajenas al proceso normal. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la muestra real N° 20 hasta la muestra con la que se vuelvan a determinar.

D.1.4. Carta de Desviaciones Estándar Móviles

Cuando las muestras que se tomen de un proceso de producción sean de diferente tamaño, como en el caso de las Cartas de Medias Móviles a que se refiere el Inciso D.1.3., también se puede utilizar la Carta de Desviaciones Estándar Móviles, analizando muestras virtuales de tamaño uniforme, que se constituyen utilizando todas las muestras realmente obtenidas. Esta carta se basa en los mismos principios descritos en el Inciso D.1.2. de este Manual, con las siguientes modificaciones:

D.1.4.1. Gráfica de tendencias en la Carta de Desviaciones Estándar Móviles

La gráfica de tendencias en la Carta de Desviaciones Estándar Móviles se obtiene dibujando las desviaciones estándar móviles (σ_{ml}), calculadas con la ecuación (25), para cada muestra virtual integrada como se indica en el Párrafo D.1.3.1. de este Manual.

D.1.4.2. Calidad promedio en la Carta de Desviaciones Estándar Móviles

La calidad promedio en la Carta de Desviaciones Estándar Móviles, corresponde al valor del promedio de las desviaciones estándar móviles de las muestras virtuales ($\bar{\sigma}_m$), calculado con la ecuación (24) de este Manual.

D.1.4.3. Límites estadísticos de la Carta de Desviaciones Estándar Móviles

Los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) de la Carta de Desviaciones Estándar Móviles, que limitan la zona de aceptación, están dados por las ecuaciones:

$$LS_{EST} = \bar{\sigma}_m \left(1 + \frac{t}{C_2 \sqrt{2n_m}} \sqrt{2(n_m - 1) - 2n_m C_2^2} \right) \dots\dots\dots(31)$$

$$LI_{EST} = \bar{\sigma}_m \left(1 - \frac{t}{C_2 \sqrt{2n_m}} \sqrt{2(n_m - 1) - 2n_m C_2^2} \right) \dots\dots\dots(32)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en el Inciso D.1.3.

Si en las ecuaciones (31) y (32) se considera $t = 3$ (nivel de confianza de 99,7%, según se señala en el Punto e) del Párrafo D.1.1.3.) y se definen los factores B_3 y B_4 como:

$$B_3 = 1 - \frac{3}{C_2 \sqrt{2n_m}} \sqrt{2(n_m - 1) - 2n_m C_2^2} \dots\dots\dots(33)$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{C_2 \sqrt{2n_m}} \sqrt{2(n_m - 1) - 2n_m C_2^2} \dots\dots\dots(34)$$

Entonces los límites estadísticos, superior e inferior, serán respectivamente:

$$LSE_{ST} = B_4 \bar{\sigma}_m \dots\dots\dots(35)$$

$$LIE_{ST} = B_3 \bar{\sigma}_m \dots\dots\dots(36)$$

Los valores de los factores B_3 y B_4 , para $t = 3$, pueden obtenerse de la Tabla 1, según el tamaño de las muestras virtuales (n_m), en la que se observa que el valor de B_3 para muestras hasta de 5 elementos es cero, por lo que el límite estadístico inferior en esos casos coincide con el eje de las muestras; ese valor se va incrementando a partir de muestras de 6 elementos, mientras que el valor de B_4 va decreciendo desde muestras de 2 elementos, por lo que generalmente los límites estadísticos no son equidistantes respecto a la calidad promedio.

D.1.4.4. Ejemplo 4. Utilización de la Carta de Desviaciones Estándar Móviles

Supóngase que para el caso que se ejemplifica en el Párrafo D.1.3.5. de este Manual y con base en las mismas muestras reales, la compactación de la base hidráulica se controlará estadísticamente mediante una Carta de Desviaciones Estándar Móviles, con nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$), como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta de Desviaciones Estándar, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras reales, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, la desviación estándar, como se muestra en la Figura 9 de este Manual. En el caso del grado de compactación que se ejemplifica no se establece el nivel de calidad en términos de la desviación estándar, sino de las tolerancias, por lo que en esta carta no se tendrán límites de especificación; pero en los casos donde si se indique el cumplimiento de este parámetro estadístico, se trazan a partir de los valores especificados, las líneas que respectivamente indiquen los límites superior (LS_{ESP}) e inferior (LI_{ESP}) de especificación que determinen las zonas de rechazo.

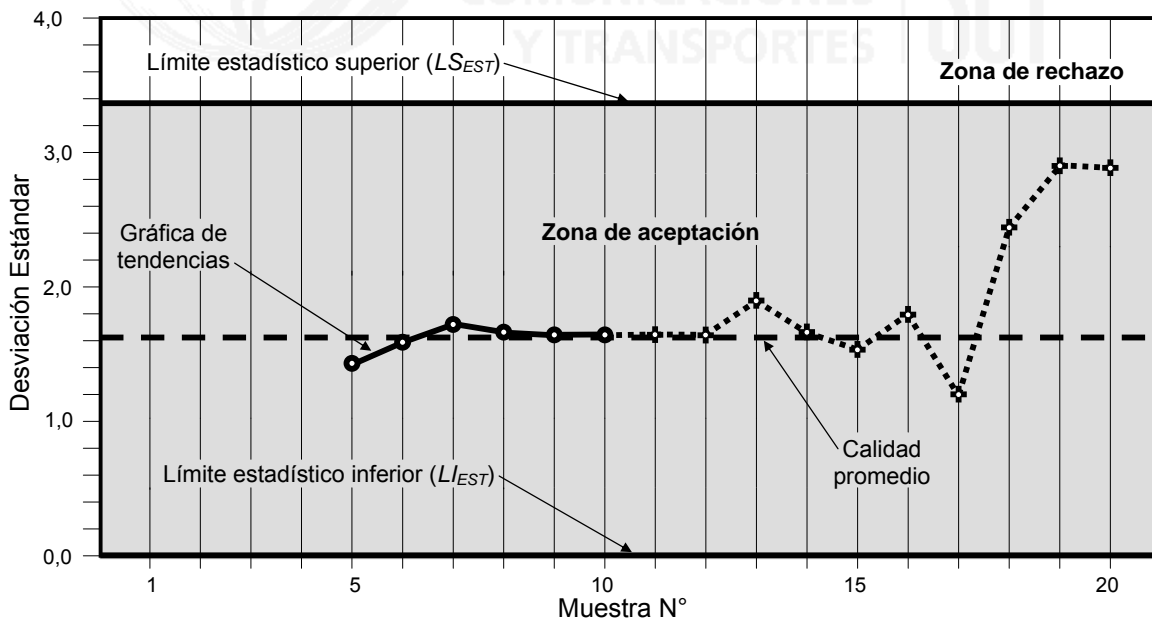


FIGURA 9.- Carta de Desviaciones Estándar Móviles para los grados de compactación del Ejemplo 4

- b) De los resultados del proceso obtenidos de las pruebas de compactación que se anotan en un formato similar al mostrado en la Tabla 3, se calcula con la ecuación

(3) la media (\bar{X}) de cada muestra real, la que también se anota en un formato como el de la Tabla 5, para calcular con la ecuación (25), la desviación estándar móvil (σ_{mi}) de cada muestra virtual de 5 elementos ($n_m = 5$). En la carta de control se dibujan las desviaciones estándar móviles calculadas, que definen la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas continuas gruesas en la Figura 9 de este Manual.

- c) Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras reales 1 a 10 de la Tabla 5 y de la Figura 9), se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con la ecuación (24) se calcula el promedio de las desviaciones estándar móviles ($\bar{\sigma}_m$), como se muestra en la Tabla 5. De la Tabla 1 se seleccionan los factores B_3 y B_4 que correspondan al tamaño de las muestras virtuales que se utiliza (n_m), que en este ejemplo, para $n_m = 5$, $B_3 = 0$ y $B_4 = 2,089$. Con estos factores y el promedio de las desviaciones estándar móviles, mediante las ecuaciones (35) y (36) de este Manual, se calculan los límites estadísticos correspondientes:

$$LS_{EST} = B_4 \bar{\sigma}_m = 2,089(1,61) = 3,36$$

$$LI_{EST} = B_3 \bar{\sigma}_m = 0(1,61) = 0$$

- d) A partir de los valores del promedio de las desviaciones estándar móviles ($\bar{\sigma}_m = 1,61$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 3,36$ y $LI_{EST} = 0$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como la zona de aceptación, proyectándolas hacia adelante, como se muestra en la Figura 9 de este Manual.
- e) En la medida en que se toman las siguientes muestras reales (11 en adelante de la Tabla 5), se calcula con la ecuación (3) la media de cada una, la que también se anota en el formato de la Tabla 5, para calcular con la ecuación (25), la desviación estándar móvil (σ_{mi}) de cada muestra virtual, que inmediatamente se dibuja en la carta de control, continuando la gráfica de tendencias, como se muestra con líneas discontinuas en la Figura 9 de este Manual.
- f) Como se observa en la Figura 9 de este Manual, las desviaciones estándar móviles de todas las muestras virtuales se alojaron en la zona de aceptación, por lo que se puede afirmar que, desde el punto de vista de la dispersión, el proceso está bajo control estadístico, es decir, sólo actúan causas aleatorias propias del mismo. Sin embargo, a partir de la muestra real N° 17, las desviaciones estándar móviles muestran tendencia hacia el límite estadístico superior, por lo que, tomando en cuenta que las indicaciones que se desprenden de la Carta de Desviaciones Estándar Móviles son diferidas, conviene revisar el proceso desde la muestra real N° 18.
- g) Dada la conveniencia de recalcular periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta la muestra real N° 20, se repetiría el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando los datos de la muestra real N° 1 a la N° 20. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la muestra real N° 20 hasta la muestra real con la que se vuelvan a determinar. Cabe señalar que, aunque en la Carta de Desviaciones Estándar no se observó la existencia de causas asignables, dichas causas sí se apreciaron en la Carta de Medias Móviles del Párrafo D.1.3.5., que se elaboró con las mismas muestras reales, por lo que, para este ejemplo, el recálculo de los límites estadísticos de la Carta de Desviaciones Estándar Móviles se hará eliminando los datos de las muestras reales N° 14 a N° 17, que manifestaron la existencia de causas asignables ajenas al proceso normal.

D.1.5. Carta Mixta

Una Carta Mixta se integra con una Carta de Medias como la descrita en el Inciso D.1.1. y una Carta de Desviaciones Estándar como la del Inciso D.1.2., como se muestra en la Figura 10 de este Manual, las que se analizan simultáneamente para contar con más elementos que permitan detectar la posible ocurrencia de causas asignables, pues las Cartas de Medias sólo señalan causas asignables que afectan a la medida de centralización y las Cartas de Desviaciones Estándar, a las que tienen efecto en la dispersión.

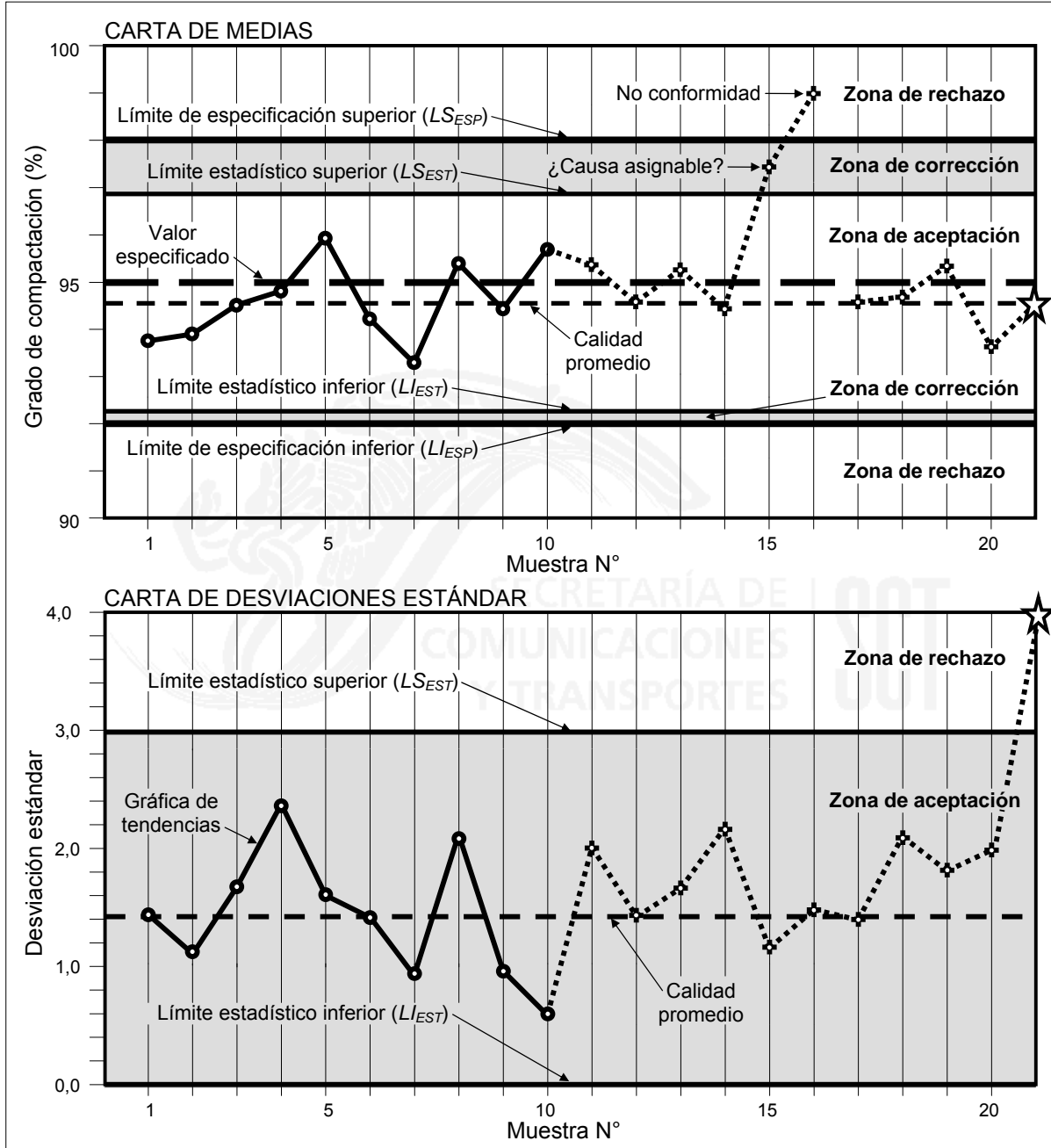


FIGURA 10.- Carta Mixta para los Ejemplos 1 y 2

Por ejemplo, si durante el control estadístico a que se refiere el Párrafo D.1.1.4., se toma una muestra 21, cuyos grados de compactación sean 90,30; 90,90; 94,58; 98,30 y 98,80, de la que, mediante las ecuaciones (3) y (8), se determina una media (\bar{X}) de 94,58 y una desviación estándar (σ) de 3,98, respectivamente, y se dibuja esa media en la Carta de

Medias de la Figura 10 de este Manual, se observará que coincide con la calidad promedio, al centro de la zona de aceptación, por lo que se deducirá que el proceso se encuentra bajo control estadístico, es decir, que no actúan causas asignables. Sin embargo, si la desviación estándar se dibuja en la Carta de Desviaciones Estándar de la misma Figura, elaborada para el mismo proceso, se verá que cae en la zona de rechazo, indicando que el proceso está fuera de control estadístico, de manera que sí actúan causas asignables. Por lo contrario, las desviaciones estándar de las muestras N° 15 y N° 16, dibujadas en la Carta de Desviaciones Estándar de esa Figura, se ubicaron cerca de la calidad promedio, en la zona de aceptación, indicando que el proceso está bajo control, mientras que las medias de las mismas muestras, en la Carta de Medias, cayeron en las zonas de corrección y de rechazo, respectivamente, señalando que sí existen causas asignables.

De la misma forma, se puede tener una Carta Mixta integrada con una Carta de Medias Móviles como la descrita en el Inciso D.1.3. y una Carta de Desviaciones Estándar Móviles como la del Inciso D.1.4.

D.2. CARTAS DE CONTROL PARA CARACTERÍSTICAS CONTABLES

D.2.1. Carta “P”

La Carta “P” es una carta para características contables que mide la fracción defectuosa de los elementos producidos, en la que se clasifica cada elemento en *defectuoso* o *no defectuoso*.

D.2.1.1. Gráfica de tendencias en la Carta “P”

La gráfica de tendencias en la Carta “P” se obtiene dibujando la fracción de elementos defectuosos de cada muestra (*p*), que se determina con la siguiente expresión:

$$p = \frac{d}{n} \dots\dots\dots(37)$$

Donde:

- p* = Fracción de elementos defectuosos de una muestra.
- d* = Número de elementos defectuosos en la muestra.
- n* = Tamaño de la muestra. Número de elementos que integran cada muestra.

D.2.1.2. Calidad promedio en la Carta “P”

La calidad promedio en la Carta “P”, corresponde a la fracción defectuosa promedio (\bar{p}) de las muestras obtenidas, es decir:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{k=1}^N d_k}{\sum_{k=1}^N n_k} \dots\dots\dots(38)$$

Donde:

- \bar{p} = Fracción defectuosa promedio de todas las muestras.
- d_k* = Número de elementos defectuosos de la muestra *k*.
- n_k* = Número total de elementos que integran la muestra *k*.
- N* = Número de muestras analizadas.

D.2.1.3. Límites estadísticos de la Carta “P”

Los límites estadísticos de la Carta “P” están dados por las siguientes ecuaciones, para un nivel de confianza de 99,7% (*t* = 3):

$$LS_{EST} = \bar{p} + \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}} \dots\dots\dots(39)$$

$$LI_{EST} = \bar{p} - \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}} \dots\dots\dots(40)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en los Párrafos D.2.1.1. y D.2.1.2.

Cabe señalar que el límite estadístico inferior calculado con la ecuación (40) puede tener un valor negativo, en cuyo caso, ese valor se considera cero.

Como los límites estadísticos de la Carta “P” dependen del tamaño de las muestras, para que puedan ser proyectados al futuro se requiere que sean líneas rectas, siendo entonces indispensable que todas las muestras tengan el mismo tamaño.

D.2.1.4. Ejemplo 5. Utilización de la Carta “P”

Supóngase que para la construcción de muros aparentes se fabrican bloques cerámicos de barro, para los que el proyecto tolera hasta un 7% de bloques con defectos de acabado que pueden ser aceptados, es decir, una fracción defectuosa (*p*) de 0,070, por lo que el proceso de fabricación se controlará estadísticamente mediante una Carta “P”, con nivel de confianza de 99,7% (*t* = 3), tomando muestras seleccionadas al azar conforme a lo indicado en el Manual M·CAL·1·02, *Criterios Estadísticos de Muestreo*, de 50 bloques cada una, como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta “P”, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, la fracción defectuosa (*p*), trazando a partir del valor correspondiente a la especificada, la línea que indique el límite superior (*LS_{ESP}*) de especificación que determine la zona de rechazo, como se muestra en la Figura 11 de este Manual.

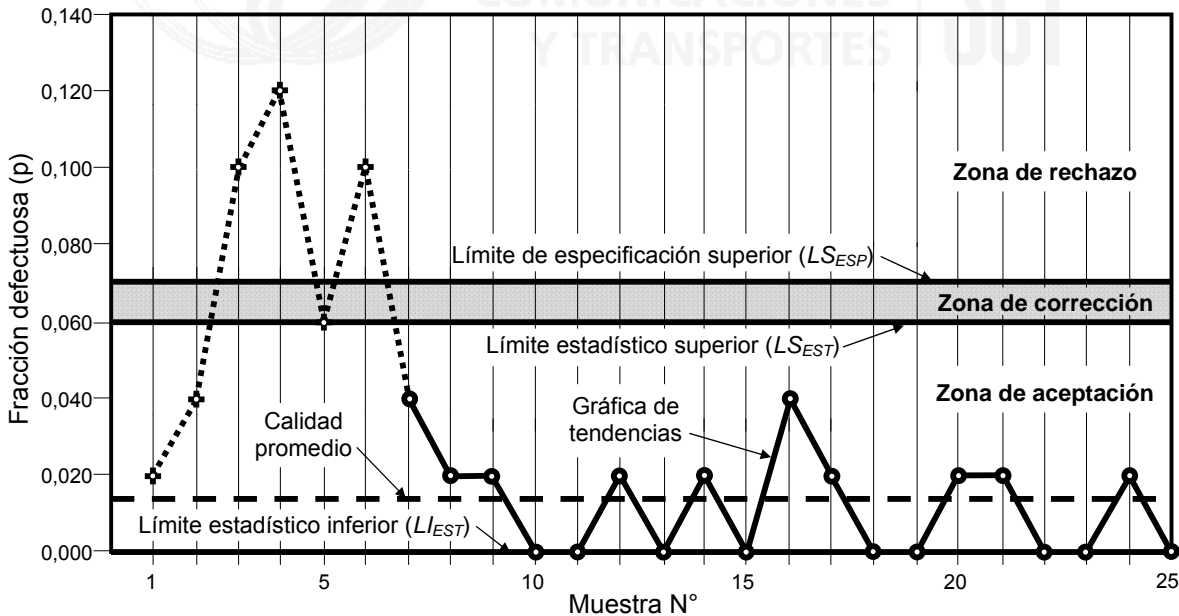


FIGURA 11.- Carta “P” para los bloques del Ejemplo 5

- b) Se examinan los resultados del proceso, inspeccionando cada uno de los bloques que integren las muestras. Los datos obtenidos de cada muestra, se anotan en un formato como el mostrado en la Tabla 9, calculando con la ecuación (37) las correspondientes fracciones defectuosas (p), las que se dibujan en la carta de control para definir la gráfica de tendencias, como se muestra en la Figura 11 de este Manual.

TABLA 9.- Parámetros estadísticos del Ejemplo 5

Nuestra N°	Tamaño (n)	Número de elementos defectuosos (d)	Fracción defectuosa (p)
1	50	1	0,020
2	50	2	0,040
3	50	5	0,100
4	50	6	0,120
5	50	3	0,060
6	50	5	0,100
7	50	2	0,040
8	50	1	0,020
9	50	1	0,020
10	50	0	0,000
11	50	0	0,000
12	50	1	0,020
13	50	0	0,000
14	50	1	0,020
15	50	0	0,000
16	50	2	0,040
17	50	1	0,020
18	50	0	0,000
19	50	0	0,000
20	50	1	0,020
21	50	1	0,020
22	50	0	0,000
23	50	0	0,000
24	50	1	0,020
25	50	0	0,000

En este ejemplo, debido a la fuerte dispersión de los datos de las muestras 1 a 6, según se observa en la Figura 11, se consideran correspondientes a la etapa inicial del proceso, por lo que no son representativas del proceso normal

Los datos de la muestra 7 en adelante, que sí son representativos del proceso normal, son los que se utilizan para calcular la calidad promedio y los límites estadísticos de la Carta "P"

- c) En la gráfica de tendencias de la Figura 11 se observa que la dispersión de los resultados obtenidos en las muestras 1 a 6 es muy grande comparada con la de las muestras 7 a 25, lo que indica que hasta la muestra 6, el proceso se encontraba en su etapa inicial de producción, por lo que puede considerarse que el proceso se estableció normalmente a partir de la muestra 7. Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras 7 a 25 de la Tabla 9 y de la Figura 11) se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con la ecuación (38) se calcula la fracción defectuosa promedio (\bar{p}) de las muestras obtenidas, sin considerar los datos de las muestras 1 a 6, que no pertenecen al proceso normal, y mediante las ecuaciones (39) y (40) de este Manual, se determinan los límites estadísticos correspondientes:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{k=1}^N d_k}{\sum_{k=1}^N n_k} = \frac{12}{950} = 0,013$$

$$LS_{EST} = \bar{p} + \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}} = 0,013 + \frac{3\sqrt{0,013(1-0,013)}}{\sqrt{50}} = 0,060$$

$$LI_{EST} = \bar{p} - \frac{3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}} = 0,013 - \frac{3\sqrt{0,013(1-0,013)}}{\sqrt{50}} = -0,035 \approx 0$$

- d) A partir de los valores de la fracción defectuosa ($\bar{p} = 0,013$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 0,060$ y $LI_{EST} = 0$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como las zonas de aceptación y de corrección, proyectándolas hacia delante, como se muestra en la Figura 11 de este Manual.
- e) En la medida en que se toman las siguientes muestras (26 en delante), se calcula con la ecuación (37) la fracción defectuosa (p) de cada muestra e inmediatamente se dibuja en la carta de control, continuando la gráfica de tendencias.
- f) Dada la conveniencia de recalculer periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta una determinada muestra, se repite el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando en este ejemplo, los datos de la muestra 7 a la muestra que corresponda al momento en que se recalculen los límites, pero eliminado los datos de las muestras que pudieran quedar fuera de la zona de aceptación, que manifiesten la existencia de causas asignables ajenas al proceso normal. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la última muestra con la que se calcularon los límites hasta la muestra con la que se vuelvan a determinar.

D.2.2. Carta “C”

La Carta “C” es una carta para características contables que mide el número de defectos por unidad producida (c).

D.2.2.1. Gráfica de tendencias en la Carta “C”

La gráfica de tendencias en la Carta “C” se obtiene dibujando las medias de los defectos en todos los elementos que integran cada muestra, que se determinan con la siguiente expresión:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^n c_j}{n} \dots\dots\dots(41)$$

Donde:

- C = Media de defectos de la muestra. Promedio aritmético del número de defectos en cada elemento de la muestra.
- c_j = Número de defectos en el elemento j de la muestra.
- n = Tamaño de la muestra. Número de elementos que integran cada muestra.

D.2.2.2. Calidad promedio en la Carta “C”

La calidad promedio en la Carta “C”, corresponde al valor del promedio de las medias de defectos de las muestras, es decir:

$$C' = \frac{\sum_{k=1}^N C_k}{N} \dots\dots\dots(42)$$

Donde:

C' = Promedio de las medias de defectos de las muestras. Promedio aritmético de las medias de defectos de todas las muestras.

C_k = Media de defectos de la muestra k .

N = Número de muestras analizadas.

D.2.2.3. Límites estadísticos de la Carta “C”

Los límites estadísticos de la Carta “C” están dados por las siguientes ecuaciones, para un nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$):

$$LS_{EST} = C' + 3\sqrt{C'} \dots\dots\dots(43)$$

$$LI_{EST} = C' - 3\sqrt{C'} \dots\dots\dots(44)$$

Donde C' es el promedio de las medias de defectos de las muestras.

Cabe señalar que el límite estadístico inferior calculado con la ecuación (44) puede tener un valor negativo, en cuyo caso, ese valor se considera cero.

D.2.2.4. Ejemplo 6. Utilización de la Carta “C”

Supóngase que para la construcción de la barrera central de una carretera se fabrican elementos de concreto precolado, para los que el proyecto tolera hasta 5 defectos de acabado por elemento, por lo que el proceso de fabricación se controlará estadísticamente mediante una Carta “C”, con nivel de confianza de 99,7% ($t = 3$), tomando muestras de 10 elementos seleccionados al azar conforme a lo indicado en el Manual M·CAL·1·02, *Criterios Estadísticos de Muestreo*, como sigue:

- a) Se prepara la gráfica que se utilizará como Carta “C”, colocando en uno de sus ejes los números de las muestras, según se tomen cronológicamente, y en el otro eje, el número de defectos por unidad (c), trazando a partir del valor correspondiente al número de defectos por unidad especificado, la línea que indique el límite superior (LS_{ESP}) de especificación que determine la zona de rechazo, como se muestra en la Figura 12 de este Manual.

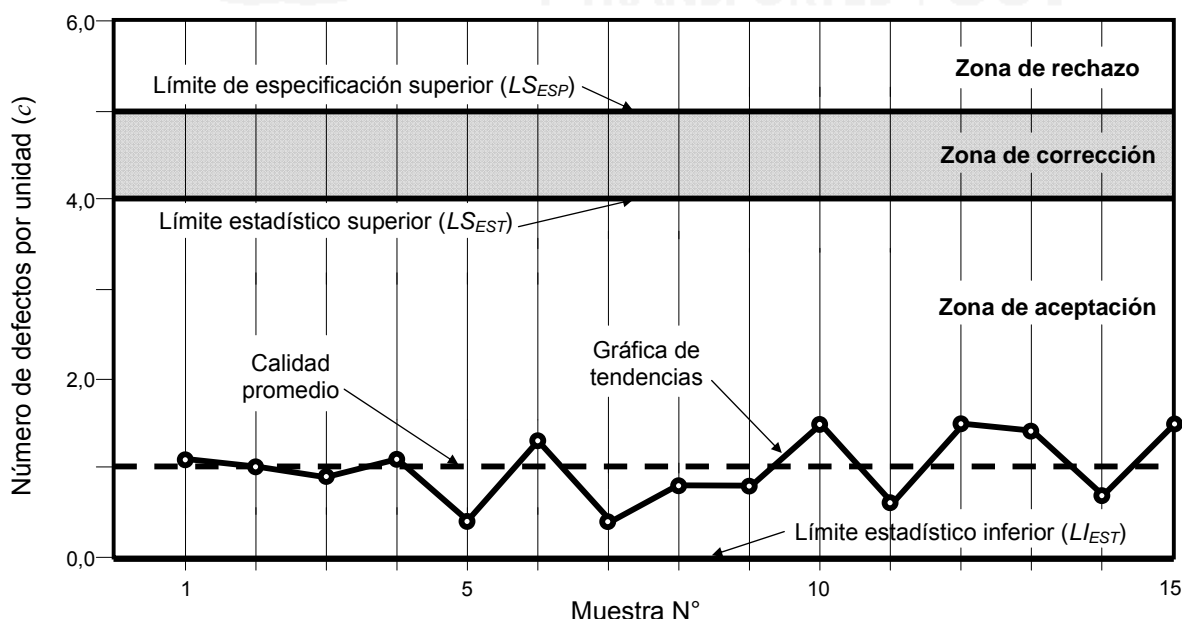


FIGURA 12.- Carta “C” para los elementos de concreto precolado del Ejemplo 6

- b) Se examinan los resultados del proceso, inspeccionando cada uno de los elementos que integren las muestras. Los datos obtenidos de cada uno, se anotan en un formato como el mostrado en la Tabla 10, calculando con la ecuación (41) las medias de defectos de las muestras (C), las que se dibujan en la carta de control para definir la gráfica de tendencias, como se muestra en la Figura 12 de este Manual.

TABLA 10.- Parámetros estadísticos del Ejemplo 6

Muestra N°	Elemento N°										Media de defectos de la muestra (C)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	Número de defectos por unidad (c)										
1	0	0	4	0	0	3	0	1	3	0	1,10
2	4	0	2	0	0	0	0	2	0	2	1,00
3	0	0	3	3	0	2	0	0	0	1	0,90
4	1	0	1	2	0	0	2	3	1	1	1,10
5	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0,40
6	0	1	1	4	0	4	0	1	2	0	1,30
7	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0,40
8	0	2	0	0	0	4	0	2	0	0	0,80
9	0	0	3	0	0	1	0	4	0	0	0,80
10	3	2	0	0	4	0	4	0	2	0	1,50
11	1	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0,60
12	0	0	3	1	0	3	0	4	2	2	1,50
13	4	0	3	0	2	2	0	0	0	3	1,40
14	0	0	2	0	0	0	3	0	0	2	0,70
15	4	2	0	0	0	1	2	4	1	1	1,50
Promedio de las medias de defectos de las muestras (C')											1,00

- c) Una vez que se cuenta con suficientes resultados que indiquen que el proceso se ha establecido normalmente (muestras 1 a 15 de la Tabla 10 y de la Figura 12) se procede a determinar los límites estadísticos superior (LS_{EST}) e inferior (LI_{EST}) del proceso normal; para ello, con la ecuación (42) se obtiene el promedio de las medias de defectos de las muestras (C') de 1,00 y, mediante las ecuaciones (43) y (44) de este Manual, se determinan los límites estadísticos correspondientes:

$$LS_{EST} = C' + 3\sqrt{C'} = 1 + 3\sqrt{1} = 4,00$$

$$LI_{EST} = C' - 3\sqrt{C'} = 1 - 3\sqrt{1} = -2,00 \approx 0$$

- d) A partir de los valores del promedio de las medias de las muestras ($C' = 1,00$) y de los límites estadísticos ($LS_{EST} = 4,00$ y $LI_{EST} = 0$), se trazan las líneas que determinan la calidad promedio, así como las zonas de aceptación y de corrección, proyectándolas hacia delante, como se muestra en la Figura 12 de este Manual.
- e) En la medida en que se toman las siguientes muestras, se calcula con la ecuación (41) la media de defectos (C) de cada muestra e inmediatamente se dibuja en la carta de control, continuando la gráfica de tendencias.
- f) Dada la conveniencia de recalculer periódicamente los límites estadísticos, para determinarlos con los datos obtenidos hasta una determinada muestra, se repetirá el paso indicado en el Punto c) de este Párrafo, tomando los datos de la muestra 1 hasta la muestra que corresponda al momento en que se recalculen los límites, pero eliminando los datos de las muestras que pudieran quedar fuera de la zona de aceptación, que manifiesten la existencia de causas asignables ajenas al proceso normal. Los nuevos límites estadísticos se trazarán desde la última muestra con la que se calcularon los límites hasta la muestra con la que se vuelvan a determinar.

E. PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Cuando en una carta de control se tengan dudas sobre la aceptación estadística de una muestra o cuando las muestras que se obtengan de un proceso de producción sean de diferente tamaño, con base en la información estadística previamente recopilada de los resultados del proceso y en los datos de una muestra, se puede realizar un prueba de hipótesis para inferir si el proceso que generó esa muestra está bajo control estadístico o fuera de control estadístico, es decir, si sólo existen causas aleatorias o intervienen causas asignables que deban ser eliminadas.

Una prueba de hipótesis es un procedimiento que permite fundamentar la decisión de aceptación o rechazo estadístico que se haga sobre una muestra de un proceso cualquiera. Ese procedimiento consiste en estudiar dos hipótesis posibles, una denominada *hipótesis bajo prueba* o *hipótesis nula* (HBP), que propone la igualdad de dos parámetros ($A=B$) y otra conocida como *hipótesis alterna* (HA), que considera la posibilidad de que esos parámetros sean diferentes ($A<B$ o $A>B$).

En una prueba de hipótesis pueden ocurrir dos tipos de errores:

- Error de juicio Tipo I, cuando se rechaza una hipótesis bajo prueba que debía ser aceptada,
- Error de juicio Tipo II, cuando se acepta una hipótesis bajo prueba que debía ser rechazada.

Se llama *nivel de significancia* de la prueba que se realice, a la máxima probabilidad que se acepta de cometer un error de juicio Tipo I. El nivel de significancia es complementario al nivel de confianza con el que se desea trabajar, pues éste representa la probabilidad de aceptar la hipótesis bajo prueba; por ejemplo, si se selecciona un nivel de confianza de 90%, la máxima probabilidad de rechazar una hipótesis bajo prueba que deba ser aceptada será de 10%.

Un principio fundamental de toda prueba de hipótesis que se aplique, es que entre todas las pruebas que tengan el mismo nivel de significancia, debe elegirse aquella que tenga la menor probabilidad de cometer un error de juicio Tipo II.

Las pruebas de hipótesis pueden ser:

- Pruebas de hipótesis para la media de la población,
- Pruebas de hipótesis para la desviación estándar de la población y
- Prueba de hipótesis para la comparación de dos medias.

E.1. PASOS PARA APLICAR UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Para aplicar una prueba de hipótesis como se indica en las Fracciones E.2. y E.3 de este Manual, en forma general se deben ejecutar los siguientes pasos:

- E.1.1.** Se obtiene una muestra representativa del proceso de producción, de n elementos, y se determinan sus parámetros estadísticos.
- E.1.2.** Mediante un manejo razonable de la información obtenida de la muestra y de la información estadística determinada a partir de las muestras previas de que se disponga, se establecen las hipótesis bajo prueba (HBP) y alterna (HA).
- E.1.3.** Se selecciona el nivel de significancia o el de confianza con que se desea trabajar.
- E.1.4.** Según el tipo de prueba por ejecutar y de acuerdo con la naturaleza de los datos estadísticos disponibles, se selecciona el tipo de distribución de probabilidades que se debe considerar.
- E.1.5.** Con la distribución de probabilidades seleccionada se obtiene el parámetro K definido por el nivel de confianza o por el de significancia que determina las zonas de aceptación y de rechazo.

E.1.6. Se calcula el parámetro K_0 que sirve de base de comparación con el parámetro K , para aceptar o rechazar la hipótesis bajo prueba.

E.2. PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA DE LA POBLACIÓN

E.2.1. Muestra sobre la que se aplicará la prueba de hipótesis

Una vez obtenida la muestra sobre la que se aplicará la prueba de hipótesis, con la ecuación (3) de este Manual, se calcula la media (\bar{X}) de la característica por controlar en todos los elementos de la muestra.

E.2.2. Establecimiento de las hipótesis bajo prueba y alterna

E.2.2.1. Hipótesis bajo prueba

Para establecer la hipótesis bajo prueba, es necesario conocer el promedio de las medias de las muestras ($\bar{\bar{X}}$) determinado con la ecuación (4) de este Manual, a partir de las muestras obtenidas previamente a la muestra que se sujeta a la prueba de hipótesis.

La hipótesis bajo prueba considera que la media de la población (\bar{X}') a la que pertenece la muestra sujeta a la prueba, es igual al promedio de las medias de las muestras previas ($\bar{\bar{X}}$):

$$\text{HBP: } \bar{X}' = \bar{\bar{X}}$$

E.2.2.2. Hipótesis alterna

Si la media de la muestra (\bar{X}) sujeta a la prueba es mayor que el promedio de las medias de las muestras previas ($\bar{\bar{X}}$) se establece una hipótesis alterna *mayor que*, considerando que la media de la población (\bar{X}') a la que pertenece dicha muestra puede ser mayor que el promedio de las medias:

$$\text{HA: } \bar{X}' > \bar{\bar{X}}$$

De lo contrario, se establece una hipótesis alterna *menor que*:

$$\text{HA: } \bar{X}' < \bar{\bar{X}}$$

E.2.3. Selección del nivel de significancia o del nivel de confianza

Como el nivel de significancia es complementario al nivel de confianza, si el primero crece, el segundo decrece disminuyendo la zona de aceptación, por lo que a menor nivel de confianza se tiene una prueba de hipótesis más estricta, ya que la probabilidad de aceptar la hipótesis bajo prueba es menor. Comúnmente se utilizan niveles de significancia de 5 ó 10%, que corresponden a niveles de confianza de 95 y 90%, respectivamente.

E.2.4. Selección del tipo de distribución de probabilidades por considerar

Se elige la distribución normal de probabilidades, si en la información estadística previa disponible se cuenta con la desviación estándar de las medias de las muestras ($\sigma_{\bar{X}}$), determinada con la expresión:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})^2}{N-1}} \dots\dots\dots(45)$$

Donde:

$\sigma_{\bar{X}}$ = Desviación estándar de las medias de las muestras.

\bar{X}_k = Media de la muestra k , obtenida con la ecuación (3) de este Manual.

$\bar{\bar{X}}$ = Promedio de las medias de las muestras determinado con la ecuación (4) de este Manual.

N = Número de muestras previas.

Si se desconoce la desviación estándar de las medias de las muestras ($\sigma_{\bar{X}}$), se considera la distribución de Student.

E.2.5. Obtención del parámetro K

E.2.5.1. Para la distribución normal de probabilidades

Para la distribución normal, el parámetro K corresponde al valor de t que define el nivel de confianza con el que se desea trabajar, es decir, el área bajo la curva de distribución normal que se obtiene de la Tabla 11 de este Manual, en la que los valores contenidos en su cuerpo corresponden al área bajo la curva, desde su eje central hasta t . Por tanto, si se desea conocer el valor de t para un nivel de significancia de 5%, que corresponde a un nivel de confianza de 95%, en un lado del eje de la curva se tendrá 50% y en el otro, 45%, por lo que se debe buscar en la Tabla el valor de 0,45; sumando al valor que se lee en la columna de la izquierda la fracción que se determina en el primer renglón, se obtiene el valor de t , pero como el área de 0,45 se ubica entre 0,4495 y 0,4505, para determinar en el primer renglón el valor de la fracción correspondiente, es necesario efectuar una interpolación mediante la siguiente fórmula:

$$x = a + \frac{b-a}{B-A}(y-A) \dots\dots(46)$$

Donde:

x = Fracción de t que se desea determinar en el primer renglón de la Tabla 11.

y = Área bajo la curva para la que se desea conocer t .

A = Valor en la Tabla 11 del área bajo la curva inmediata inferior a la del área para la que se desea conocer t .

B = Valor en la Tabla 11 del área bajo la curva inmediata superior a la del área para la que se desea conocer t .

a = Fracción de t en el primer renglón de la Tabla 11 correspondiente al valor A .

b = Fracción de t en el primer renglón de la Tabla 11 correspondiente al valor B .

En este caso la fracción de t es:

$$0,04 + \frac{0,05 - 0,04}{0,4505 - 0,4495}(0,45 - 0,4495) = 0,045$$

y el valor que se lee en la primera columna del renglón donde se ubican A y B , es 1,6, por lo que t vale:

$$t = 1,6 + 0,045 = 1,645$$

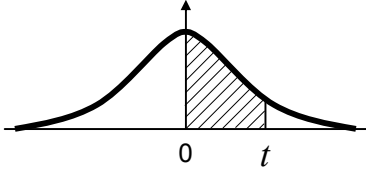
Como la distribución normal es simétrica respecto a su eje, si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\bar{x}' > \bar{\bar{x}}$) el parámetro K será:

$$K = t = 1,645$$

Pero si se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\bar{x}' < \bar{\bar{x}}$) el parámetro K será:

$$K = -t = -1,645$$

TABLA 11.- Valores de t en la distribución normal

DISTRIBUCIÓN NORMAL		Área bajo la curva entre 0 y t									
											
t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754	
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517	
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879	
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549	
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852	
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	
0,9	0,3159	0,3189	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389	
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621	
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830	
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015	
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319	
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441	
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545	
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633	
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706	
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767	
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4803	0,4812	0,4817	
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857	
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890	
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916	
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936	
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952	
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964	
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974	
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981	
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986	
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993	
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995	
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	

De esta forma, las zonas de aceptación y rechazo serán las que se muestran en la Figura 13 de este Manual.

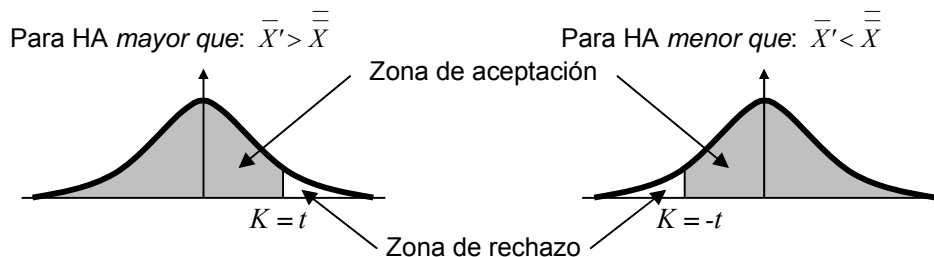


FIGURA 13.- Zonas de aceptación y rechazo en las pruebas de hipótesis para la media de la población y para la comparación de dos medias

E.2.5.2. Para la distribución de Student

Para la distribución de Student, el parámetro K corresponde al valor de t_c que define el nivel de confianza con el que se desea trabajar, es decir, el área bajo la curva de la distribución de Student y se obtiene de la Tabla 12 de este Manual, en función del tamaño de las muestras. Los valores de t_c contenidos en la Tabla, para diferentes tamaños de las muestras, corresponden a las áreas bajo la curva que se indican como subíndices en el primer renglón, desde un extremo de la curva hasta t_c , de forma que si se desea conocer el valor de t_c para un nivel de significancia de 2,5%, es decir, un nivel de confianza de 97,5% (0,975), en ese renglón se busca $t_{0,975}$ y en la intersección de la columna respectiva con el renglón que corresponde al tamaño de la muestra menos 1 ($n-1$), se localiza el valor de t_c . Si se tiene $n = 5$ ($n-1=4$), entonces $t_c = 2,78$.

En el caso de que el nivel de confianza deseado no corresponda con algún subíndice del primer renglón de la Tabla 12, por ejemplo, 85% (0,850), para obtener el valor de t_c para una muestra de $n = 8$, es necesario efectuar una interpolación mediante la siguiente fórmula:

$$t_c = a + \frac{b-a}{B-A}(y-A) \dots\dots\dots(47)$$

Donde:

- y = Área bajo la curva para la que se desea conocer t_c .
- A = Subíndice en el primer renglón de la Tabla 12, correspondiente al área bajo la curva inmediata inferior a la del área para la que se desea conocer t_c .
- B = Subíndice en el primer renglón de la Tabla 12, correspondiente al área bajo la curva inmediata superior a la del área para la que se desea conocer t_c .
- a = Valor de t_c para A , en el renglón correspondiente a $n-1$ de la Tabla 12.
- b = Valor de t_c para B , en el renglón correspondiente a $n-1$ de la Tabla 12.

En este caso t_c es:

$$0,896 + \frac{1,43-0,896}{0,900-0,800}(0,850-0,800)=1.163$$

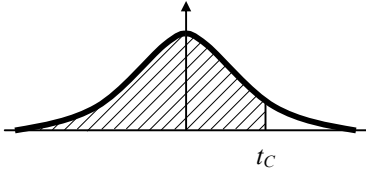
Como la distribución de Student es simétrica respecto a su eje, si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\bar{x}' > \bar{x}$) el parámetro K será:

$$K = t_c = 1,163$$

Pero si se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\bar{x}' < \bar{x}$) el parámetro K será:

$$K = -t_c = -1,163$$

TABLA 12.- Valores de t_c en la distribución de Student

DISTRIBUCIÓN DE STUDENT										
$n-1$	$t_{0,995}$	$t_{0,990}$	$t_{0,975}$	$t_{0,950}$	$t_{0,900}$	$t_{0,800}$	$t_{0,750}$	$t_{0,700}$	$t_{0,600}$	$t_{0,550}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,07	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64	0,978	0,765	0,584	0,275	0,138
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,04	3,36	2,58	2,02	1,48	0,920	0,727	0,560	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,91	1,43	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,36	0,871	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34	0,868	0,693	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,61	2,13	1,75	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,128
19	2,87	2,54	2,09	1,73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,03	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,256	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,05	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,71	1,31	0,855	0,683	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,30	0,853	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,43	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,528	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
α	2,58	2,33	1,96	1,645	1,28	0,842	0,674	0,524	0,253	0,126

De esta forma, las zonas de aceptación y rechazo serán las que se muestran en la Figura 13 de este Manual.

E.2.6. Cálculo del parámetro K_0

El parámetro K_0 sirve de base de comparación con el parámetro K , para aceptar o rechazar la hipótesis bajo prueba, de manera que si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\bar{X}' > \bar{X}$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 13 de este Manual, es decir, que K_0 es menor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba que considera que la media de la población (\bar{X}') a la que pertenece la muestra sujeta a la prueba, es igual al promedio de las medias de las muestras previas (\bar{X}), por lo que sólo actuaron causas aleatorias en el proceso de producción; pero si K_0 resulta mayor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba, con una probabilidad de cometer un error de juicio Tipo I, igual al nivel de significancia seleccionado, en cuyo caso se deduce que actuaron una o más causas asignables que deben ser eliminadas.

De la misma forma, cuando se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\bar{X}' < \bar{X}$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 13 de este Manual, es decir, que K_0 es mayor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba, pero si K_0 resulta menor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba.

El parámetro K_0 , según la distribución de probabilidades seleccionada, se calcula como sigue:

E.2.6.1. Para la distribución normal de probabilidades

Para la distribución normal el parámetro K_0 se determina mediante la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{\bar{X}' - \bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}} \dots\dots\dots(48)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en el Inciso E.2.1., el Párrafo E.2.2.1. y en el Inciso E.2.4. de este Manual.

E.2.6.2. Para la distribución de Student

Para la distribución de Student el parámetro K_0 se determina mediante la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{\bar{X}' - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \dots\dots\dots(49)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en el Inciso E.2.1. y en el Párrafo E.2.2.1. de este Manual.

E.3. PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA POBLACIÓN

E.3.1. Muestra sobre la que se aplicará la prueba de hipótesis

Una vez obtenida la muestra sobre la que se aplicará la prueba de hipótesis, con las ecuaciones (3) y (8) de este Manual, se calculan respectivamente la media (\bar{X}) y la desviación estándar (σ) de la característica por controlar en todos los elementos de la muestra.

E.3.2. Establecimiento de las hipótesis bajo prueba y alterna

E.3.2.1. Hipótesis bajo prueba

Para establecer la hipótesis bajo prueba, es necesario conocer la desviación estándar de las medias de las muestras ($\sigma_{\bar{X}}$) determinada con la ecuación (45) de este Manual, a partir de las muestras obtenidas previamente a la muestra que se sujeta a la prueba de hipótesis.

La hipótesis bajo prueba considera que la desviación estándar de la población (σ') a la que pertenece la muestra sujeta a la prueba, es igual a la desviación estándar de las medias de las muestras ($\sigma_{\bar{X}}$) por la raíz cuadrada del tamaño (n) de la muestra:

$$\text{HBP: } \sigma' = \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$$

E.3.2.2. Hipótesis Alterna

Si la desviación estándar de la muestra (σ) sujeta a la prueba es mayor que el producto de la desviación estándar de las medias de las muestras previas ($\sigma_{\bar{X}}$) por la raíz cuadrada del tamaño (n) de la muestra bajo prueba, se establece una hipótesis alterna *mayor que*, considerando que la desviación estándar de la población (σ') a la que pertenece esa muestra puede ser mayor que dicho producto:

$$\text{HA: } \sigma' > \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$$

De lo contrario, se establece una hipótesis alterna *menor que*:

$$\text{HA: } \sigma' < \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$$

E.3.3. Selección del nivel de significancia o del nivel de confianza

Para la selección del nivel de significancia o el nivel de confianza, proceden las mismas observaciones indicadas en el Inciso E.2.3. de este Manual.

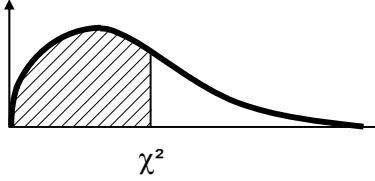
E.3.4. Selección del tipo de distribución de probabilidades por considerar

En las pruebas de hipótesis para la desviación estándar de la población invariablemente se considera una distribución de probabilidades Chi cuadrada (χ^2).

E.3.5. Obtención del parámetro K

Para la distribución Chi cuadrada, el parámetro K corresponde al valor de χ^2 correspondiente al área bajo la curva de la distribución Chi cuadrada definida por el nivel de confianza con el que se desea trabajar, cuando se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\sigma' > \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$) o por el nivel de significancia seleccionado, cuando la hipótesis alterna es *menor que* ($\sigma' < \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$) y se obtiene de la Tabla 13 de este Manual, en función del tamaño de las muestras. Los valores de χ^2 contenidos en la Tabla, para diferentes tamaños de las muestras, corresponden a las áreas bajo la curva que se indican como subíndices en el primer renglón, desde el extremo izquierdo de la curva hasta χ^2 , de forma que si se desea conocer el valor de χ^2 para un nivel de significancia de 5%, es decir, un nivel de confianza de 95% (0,950) considerando una hipótesis alterna *mayor que*, en ese renglón se busca $\chi^2_{0,950}$ y en la intersección de la columna respectiva con el renglón que corresponde al tamaño de la muestra menos 1 ($n-1$), se localiza el valor de χ^2 . Si se tiene $n = 5$ ($n-1=4$), entonces $\chi^2 = 9,49 = K$. Si se aplica una hipótesis alterna *menor que*, con un nivel de significancia de 10% (0,100), para $n = 8$, en el primer renglón de la Tabla se busca $\chi^2_{0,100}$ y en la intersección con el renglón para $n-1=7$, se obtiene $\chi^2 = 2,83 = K$.

TABLA 13.- Valores de χ^2 en la distribución Chi cuadrada

DISTRIBUCIÓN CHI CUADRADA														
n-1	$\chi^2_{0,995}$	$\chi^2_{0,990}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,950}$	$\chi^2_{0,900}$	$\chi^2_{0,750}$	$\chi^2_{0,500}$	$\chi^2_{0,250}$	$\chi^2_{0,100}$	$\chi^2_{0,050}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,010}$	$\chi^2_{0,005}$	
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,016	0,004	0,001	0,000	0,000	
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,051	0,020	0,010	
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072	
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,76	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,483	0,297	0,207	
5	16,7	15,2	12,8	11,15	9,2	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,413	
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676	
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,18	1,69	1,24	0,989	
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34	
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73	
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16	
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,35	7,57	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60	
12	28,3	26,2	23,2	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07	
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57	
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,2	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07	
15	32,7	30,6	27,5	25,1	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,25	5,22	4,60	
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14	
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70	
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26	
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,73	10,1	8,91	7,63	6,84	
20	40,0	37,6	34,2	31,4	28,45	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43	
21	41,4	38,8	35,6	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6	10,3	8,90	8,02	
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	26,0	21,3	17,2	14,0	12,3	11,0	9,54	8,64	
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26	
24	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19,0	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89	
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,03	24,3	19,9	16,5	14,5	13,15	11,5	10,5	
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2	
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8	
28	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5	
29	52,3	49,6	45,7	42,5	39,1	33,7	28,3	23,6	19,8	17,7	16,0	14,3	13,1	
30	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15,0	13,8	
40	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	45,7	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7	
50	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	43,0	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0	
60	92,0	88,4	83,3	79,1	74,4	67,0	59,3	52,3	46,5	43,2	40,5	37,5	35,5	
70	104,2	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3	
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60,4	57,2	53,5	51,2	
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	80,6	73,3	69,1	65,6	61,8	59,2	

100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	90,12	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	-------	------	------	------	------	------

En el caso de que el nivel de significancia o el nivel de confianza deseado no correspondan con algún subíndice del primer renglón de la Tabla 13, por ejemplo, un nivel de confianza de 70% (0,700), para obtener el valor de χ^2 para una muestra de $n = 10$, es necesario efectuar una interpolación mediante la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = a + \frac{b-a}{B-A}(y-A) \dots\dots\dots(50)$$

Donde:

- y = Área bajo la curva para la que se desea conocer χ^2 .
- A = Subíndice en el primer renglón de la Tabla 13, correspondiente al área bajo la curva inmediata inferior a la del área para la que se desea conocer χ^2 .
- B = Subíndice en el primer renglón de la Tabla 13, correspondiente al área bajo la curva inmediata superior a la del área para la que se desea conocer χ^2 .
- a = Valor de χ^2 para A , en el renglón correspondiente a $n-1$ de la Tabla 13.
- b = Valor de χ^2 para B , en el renglón correspondiente a $n-1$ de la Tabla 13.

En este caso χ^2 es:

$$8,34 + \frac{11,4 - 8,34}{0,750 - 0,500}(0,70 - 0,500) = 10,79$$

Las zonas de aceptación y rechazo serán las que se muestran en la Figura 14 de este Manual.

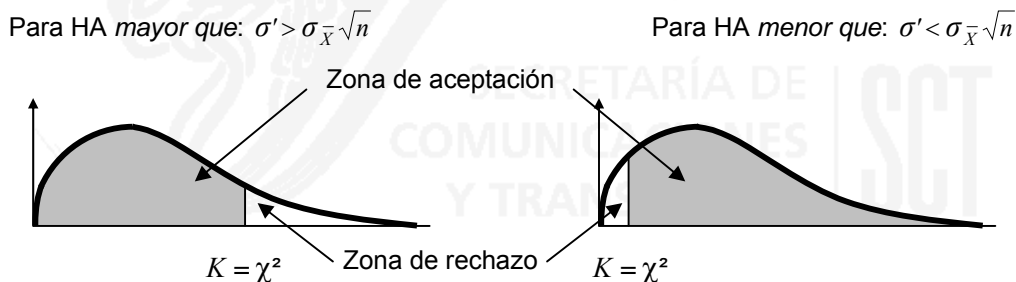


FIGURA 14.- Zonas de aceptación y rechazo en las pruebas de hipótesis para la desviación estándar de la población

E.3.6. Cálculo del parámetro K_0

El parámetro K_0 sirve de base de comparación con el parámetro K , para aceptar o rechazar la hipótesis bajo prueba, de manera que si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\sigma' > \sigma_{\bar{x}}\sqrt{n}$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 14 de este Manual, es decir, que K_0 es menor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba que considera que la desviación estándar de la población (σ') a la que pertenece la muestra sujeta a la prueba, es igual al producto de la desviación estándar de las medias de las muestras ($\sigma_{\bar{x}}$) por la raíz cuadrada del tamaño (n) de la muestra, por lo que sólo actuaron causas aleatorias en el proceso de producción; pero si K_0 resulta mayor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba, con una probabilidad de cometer un error de juicio Tipo I, igual al nivel de significancia seleccionado, en cuyo caso se deduce que actuaron una o más causas asignables que deben ser eliminadas.

De la misma forma, cuando se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\sigma' < \sigma_{\bar{x}}\sqrt{n}$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 13 de este Manual, es decir, que K_0

es mayor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba; pero si K_0 resulta menor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba.

El parámetro K_0 de una prueba de hipótesis para la desviación estándar de la población, se calcula con la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{n\sigma^2}{(\sigma_{\bar{X}}\sqrt{n})^2} \dots\dots\dots(51)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en el Inciso E.3.1. y en el Párrafo E.3.2.1. de este Manual.

F. COMPARACIÓN DE DOS MEDIAS

Cuando el examen de los resultados de un mismo proceso de producción se realiza mediante la inspección que ejecuta el Contratista de Obra a través de su control interno y la validación que efectúa el Contratista de Supervisión a través del control exterior, es frecuente que los resultados obtenidos por ambos muestren diferencias, las que pueden ser debidas a causas aleatorias propias de los procesos de muestreo y prueba o a causas asignables debidas a la forma de ejecutar dichos procesos, lo que se puede inferir mediante una comparación de dos medias.

En algunas ocasiones es posible que un mismo laboratorio tenga que introducir modificaciones en el procedimiento estandarizado para ejecutar algún tipo de muestreo o prueba y el impacto en los resultados obtenidos con el procedimiento modificado respecto al estandarizado, puede evaluarse mediante la comparación de dos medias.

En la comparación de dos medias se compara la media de la población "A" (\bar{X}'_A) con la media de la población "B" (\bar{X}'_B), siendo la población "A", por ejemplo, los resultados obtenidos por el laboratorio del Contratista de Obra o los producidos mediante el procedimiento estandarizado, y la población "B", los resultados obtenidos por el laboratorio del Contratista de Supervisión o los producidos mediante el procedimiento modificado. Dicha comparación se efectúa mediante una prueba de hipótesis, siguiendo los pasos señalados en la Fracción E.1. de este Manual, como se indica a continuación:

F.1. MUESTRAS SOBRE LAS QUE SE HARÁ LA COMPARACIÓN DE DOS MEDIAS

Se toma una muestra de n_A elementos de la población "A" y otra de n_B elementos de la población "B". Con las ecuaciones (3) y (8), respectivamente, se calculan la media de cada muestra (\bar{X}_A y \bar{X}_B) y su correspondiente desviación estándar (σ_A y σ_B).

F.2. ESTABLECIMIENTO DE LAS HIPÓTESIS BAJO PRUEBA Y ALTERNA

F.2.1. Hipótesis bajo prueba

La hipótesis de prueba en la comparación de dos medias, considera que la media de la población "A" (\bar{X}'_A) es igual que la media de la población "B" (\bar{X}'_B):

$$\text{HBP: } \bar{X}'_A = \bar{X}'_B$$

F.2.2. Hipótesis alterna

Si la media de la muestra de la población "A" (\bar{X}'_A) es mayor que la media de la muestra de la población "B" (\bar{X}'_B) se establece una hipótesis alterna *mayor que*, considerando que la media de la población "A" (\bar{X}'_A) puede ser mayor que la media de la población "B" (\bar{X}'_B):

$$\text{HA: } \bar{X}'_A > \bar{X}'_B$$

De lo contrario, se establece una hipótesis alterna *menor que*:

$$H_A: \bar{X}'_A < \bar{X}'_B$$

F.3. SELECCIÓN DEL NIVEL DE SIGNIFICANCIA O DEL NIVEL DE CONFIANZA

La selección del nivel de significancia o del nivel de confianza, se efectúa considerando lo señalado en el Inciso E.2.3. de este Manual.

F.4. SELECCIÓN DEL TIPO DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES POR CONSIDERAR

Se elige la distribución normal de probabilidades, si entre la información estadística disponible se cuenta con la desviación estándar de las medias de las muestras previas, determinada con la expresión (45) de este Manual, para cada una de las dos poblaciones:

$$\sigma_{\bar{X}'_A} \text{ y } \sigma_{\bar{X}'_B}$$

De lo contrario se considera la distribución de Student.

F.5. OBTENCIÓN DEL PARÁMETRO *K*

F.5.1. Para la distribución normal de probabilidades

Cuando se haya seleccionado la distribución normal de probabilidades, el parámetro *K*, que corresponde al valor de *t* que define el nivel de confianza con el que se desea trabajar, se determina tal y como se indica en el Párrafo E.2.5.1.

Si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\bar{X}'_A > \bar{X}'_B$) el parámetro *K* será igual a *t*, pero si se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\bar{X}'_A < \bar{X}'_B$) *K* será igual a *-t*, de forma que las zonas de aceptación y rechazo serán las mostradas en la Figura 13 de este Manual.

F.5.2. Para la distribución de Student

F.5.2.1. Cuando se desconoce la desviación estándar de las medias de las muestras previas ($\sigma_{\bar{X}}$) de una o ambas poblaciones, pero se sabe o se supone que son iguales

Esto es lo más común, pues considera que los datos que integran las muestras de ambas poblaciones proceden de un mismo proceso de producción, como por ejemplo, cuando los laboratorios del Contratista de Obra y del Contratista de Supervisión, ejecutan con estricto apego a los procedimientos estandarizados, el muestreo y las pruebas de un mismo concepto que se controla. En este caso, el parámetro *K*, que corresponde al valor de *t_C* que define el nivel de confianza con el que se desea trabajar en la distribución de Student, se determina como se indica en el Párrafo E.2.5.2. de este Manual, pero en el renglón de la Tabla 12, para el que el valor “*n-1*” es:

$$"n-1" = n_A + n_B - 2 \dots\dots\dots(52)$$

Donde *n_A* y *n_B* son los tamaños de las muestras tomadas de las poblaciones “A” y “B”, respectivamente, que se sujetan a la comparación de dos medias.

F.5.2.2. Cuando se desconoce la desviación estándar de las medias de las muestras previas ($\sigma_{\bar{X}}$) de una o ambas poblaciones y no se sabe si son iguales o diferentes

Esto debe aplicarse sólo cuando existan motivos para pensar que los datos que integran las muestras de ambas poblaciones proceden de procesos de producción diferentes, como por ejemplo, cuando el procedimiento para algún tipo de muestreo o

prueba haya sido modificado respecto al procedimiento estandarizado. En este caso, el parámetro K , que corresponde al valor de t_c que define el nivel de confianza con el que se desea trabajar en la distribución de Student, se determina como se indica en el Párrafo E.2.5.2. de este Manual, pero en el renglón de la Tabla 12, para el que el valor “ $n-1$ ” es:

$$"n-1" = \frac{1}{\frac{c^2}{n_A - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_B - 1}} \dots\dots\dots(53)$$

Donde:

$$c = \frac{\frac{\sigma_A^2}{n_A}}{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \dots\dots\dots(54)$$

Y las literales expresadas tienen los significados definidos en la Fracción F.1. de este Manual.

F.6. CÁLCULO DEL PARÁMETRO K_0

El parámetro K_0 sirve de base de comparación con el parámetro K , para aceptar o rechazar la hipótesis bajo prueba, de manera que si se aplica una hipótesis alterna *mayor que* ($\bar{X}'_A > \bar{X}'_B$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 13 de este Manual, es decir, que K_0 es menor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba que considera que la media de la población “A” (\bar{X}'_A) es igual a la media de la población “B” (\bar{X}'_B), por lo que sólo actuaron causas aleatorias en los procesos de muestreo y prueba; pero si K_0 resulta mayor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba, con una probabilidad de cometer un error de juicio Tipo I, igual al nivel de significancia seleccionado, en cuyo caso se deduce que actuaron una o más causas asignables que deben ser eliminadas.

De la misma forma, cuando se aplica una hipótesis alterna *menor que* ($\bar{X}'_A < \bar{X}'_B$) y K_0 se ubica en la zona de aceptación mostrada en la Figura 13 de este Manual, es decir, que K_0 es mayor que K , se acepta la hipótesis bajo prueba; pero si K_0 resulta menor que K (zona de rechazo), se rechaza la hipótesis bajo prueba.

El parámetro K_0 , según la distribución de probabilidades seleccionada se calcula como sigue:

F.6.1. Para la distribución normal de probabilidades

Cuando se selecciona la distribución normal de probabilidades porque entre la información estadística disponible, se cuenta con la desviación estándar de las medias de las muestras previas, para cada una de las dos poblaciones que se someten a la comparación de medias:

$$\sigma_{\bar{X}_A} \text{ y } \sigma_{\bar{X}_B}$$

El parámetro K_0 se calcula con la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{X}_A}^2}{2} + \frac{\sigma_{\bar{X}_B}^2}{2}}} \dots\dots\dots(55)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en las Fracciones F.1. y F.4. de este Manual.

F.6.2. Para la distribución de Student

F.6.2.1. Cuando se desconoce la desviación estándar de las medias de las muestras previas ($\sigma_{\bar{X}}$) de una o ambas poblaciones, pero se sabe o se supone que son iguales

El parámetro K_0 se calcula con la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \dots\dots\dots(56)$$

Donde:

$$S = \sqrt{\frac{n_A \sigma_A^2 + n_B \sigma_B^2}{n_A + n_B - 2}} \dots\dots\dots(57)$$

Y las literales expresadas tienen los significados definidos en la Fracción F.1. de este Manual.

F.6.2.2. Cuando se desconoce la desviación estándar de las medias de las muestras previas ($\sigma_{\bar{X}}$) de una o ambas poblaciones y no se sabe si son iguales o diferentes

El parámetro K_0 se calcula con la siguiente ecuación:

$$K_0 = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \dots\dots\dots(58)$$

Donde las literales expresadas tienen los significados definidos en la Fracción F.1. de este Manual.

G. REFLEXIONES FINALES

Como puede observarse en este Manual, los análisis estadísticos para el control de calidad constituyen una excelente herramienta, que permite detectar las deficiencias y desviaciones significativas en los procesos de producción durante su ejecución, tan pronto como se produzcan, siendo posible aplicar medidas correctivas oportunas y económicas.

Sin embargo, cuando un proceso de producción se ve afectado por causas asignables, que deban ser identificadas y eliminadas para mantenerlo bajo control, estos análisis sólo indican, con una alta probabilidad de acertar, que algo ajeno al proceso está ocurriendo, pero no señalan qué, por lo que es necesario que la persona responsable de ejecutar los análisis tenga una amplia experiencia y conozca el proceso, para poder identificarlas y eliminarlas, antes de que los resultados del proceso salgan de las especificaciones, lo que implicaría detenerlo mientras se corrige, con el consecuente retraso en el programa de ejecución.

Cuando un proceso de producción es controlado mediante los análisis estadísticos, puede ser optimizado, obteniendo un proceso que logre el cumplimiento de todos los requisitos de calidad establecidos en las especificaciones, en el menor tiempo y con el menor costo que sean posibles.

Para aprovechar las virtudes de los análisis estadísticos, que permiten mantener el proceso bajo control, evitando cualquier salida fuera de especificaciones y lograr su optimización, es

indispensable que las cartas de control y, en su caso, las pruebas de hipótesis se mantengan permanentemente actualizadas, ejecutando los análisis diariamente, tan pronto como se obtengan los resultados de las mediciones, pruebas de campo y pruebas de laboratorio que se realicen conforme a lo que establezcan las especificaciones e informando a los responsables de los procesos de producción, sobre cualquier posible salida fuera de control, tan pronto como se detecte.

